GBPS

2023

Global Book Publishing Services

ISBN:- 978-1-957653-19-8
PUBLISHED DATE:- 20 NOVEMBER 2023
DOI:- https://doi.org/10.37547/gbps-14

QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS, DEFINED ON AND S2 и S3

MELIEV KHABIBULLA JAMOLOVICH

Х.Ж.Мейлиев

КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА S^2 и S^3

DOI:- https://doi.org/10.37547/gbps-14 ISBN:- 978-1-957653-19-8

MELIEV KHABIBULLA JAMOLOVICH

Karshi Institute of Irrigation and Agrotechnologies

QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS,DEFINED ON and

S^2 и S^3

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В работе рассматриваются квадратичные операторы, определенных на

$$S^2 \text{ и } S^3$$

Понятие квадратичного стохастические оператора, в первые было дано в работе С. Н. Бернштейна [2], наследственности. Квадратичные операторы как объект исследования появились на рубеже тридцатых годов в работах Улама [43], где была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекурренций при изучении траекторий и необходимость проведения очень большого числа вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче. Создание ЭВМ в сороковых годах возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Улам и его сотрудники [55] провели вычисления на ЭВМ для достаточно большего числа квадратичных операторов.

Квадратичные стохастические операторы появляются в весьма различных областях математики и ее приложений: теории вероятностей [49,52,53] теории дифференциальных уравнений [46,50,51], теории динамических систем[4,5,11,13,14,2420,37,52,53], математической биологии [17,26,27,28,47,52,53]и других.

Рассмотрим некоторою биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предположим, что каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой единственной из n разновидностей 1,2,3,…,n. Шкала разновидностей (признаков, фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей i и j однозначно определяли вероятность каждой разновидности k для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («Коэффициент наследованности») через $P_{ij,k}$ Очевидно что в этом случае выполнены условия:

$$P_{ij,k} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1, \quad \text{для всех} \ \ i\, j, k$$

Предположим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флюктуациями частот. Тогда ее состояния можно описывать набором $x=\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ вероятностей разновидностей. т.е. x_i есть доля разновидности *i* в популяции.

При так называемой панмиксии или случайном скрещивании при фиксированном состоянии $x=\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ родительские пари i и j образуются с вероятностью $x_i x_j$ и, следовательно,

$$x_k' = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j \qquad (0.1)$$

будет полной вероятностью к среди непосредственных потомков.

Множество $S^{n-1} = \left\{ x=\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) : x_l \geq 0, l=1,2,\ldots,n, \sum\limits_{l=1}^{n} x_l = 1 \right\}$

называется $n-1$мерным симплексом и, так как $\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k' = 1$ и $x_k' \geq 0$ то отображение (0.1), называемое квадратичным стохастическим оператором, переводит симплекс S^{n-1} в себя.

Среди математических моделей генетики важную роль играют модели, порожденные квадратичными операторами [18.26-28,37,47,52,53].

Одной из основных изучения квадратичных операторов является исследование траекторий квадратичных операторов. Этой проблеме посвящены многочисленные работы [6,7,14,20,24,25]; изучению эргодических свойств квадратичных операторов посвящены работы [5,8,20,38]. В работах [48,54] был определен класс квадратичных процессов, который соотносится к квадратичным операторам так же, как Марковский процесс к линейным операторам.

Приведем определение квадратичного процесса в том случае, когда множество разновидностей E конечно.

Пусть $E=\{1,2,\ldots,n\}$. Обозначим через $p_{ij,k}^{[s,t]}$ вероятность появления элемента k в момент времени t при взаимодействии элементов i и j в момент s. Пусть $\left(x^{(0)}=x_1^0 \ldots x_n^0\right) \in S^{n-1}$ начальное распределение на Е. Если система переходных вероятностей $p_{ij,k}^{[s,t]}: i,j,k=1,2,\ldots,n, s,t \in R$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p_{ij,k}^{[s,t]}=p_{ji,k}^{[s,t]} \qquad (0.2)$$

и определена для $t-s \geq 1$ любых i, j, k то

$$x_l^{(\tau)}=\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} p_{ij,l}^{[0,\tau]} x_i^0 x_j^0 \qquad (0.3)$$

Аналог уравнения Колмогорова-Чепмена: здесь возможны два варианта. Для произвольных $s<\tau<t$ таких, что $\tau-s \geq 1$ и $t-\tau \geq 1$ либо

$$P_{ij,k}^{[s,t]}=\sum\nolimits_{m,\beta}^{n} p_{ij,m}^{[s,\tau]} p_{m\beta,k}^{[\tau,t]} x_\beta^\tau \qquad (0.4a)$$

либо

$$P_{ij,k}^{[s,t]}=\sum\nolimits_{m,l,r,\beta=1}^{n} p_{im,j}^{[s,\tau]} p_{jr,\beta}^{[s,t]} p_{lm,k}^{[\tau,t]} x_m^s x_r^s \qquad (0.4b)$$

Тогда процесс, определенный функциями $P_{ij,k}^{[s,t]}$ называется квадратичным соответственно типа А и типа В в зависимости от того, какое из фундаментальных уравнений (0.4a) и (0.4b) имеет место.

Уравнения (0.4a) и (0.4b) можно интерпретировать как различные правила появления “внука”. Этим уравнениям можно дать химическую трактовку, так как появление частиц в реакциях, протекающих в обычной химической кинетике, управляется уравнениями типа (0.4a), а уравнения типа (0.4b) отражают появления частиц в процессах катализа.

Если функции $P_{ij,k}^{[s,t]}$ зависят только от t-s, то такие процессы называются однородными, если $P_{ij,k}^{[s,s+1]}$ не зависит от s, но

$P_{ij,k}^{[s,t]}$ зависит от s и t при $t-s>1$, то такие процессы называются однородными за единичный промежуток; и, наконец, процессы, зависящие от s и t при любых s и t, называются неоднородными. В [12] доказано существование неоднородных процессов. Одним из методов изучения квадратичных процессов является метод усреднения [9], который сводит изучение квадратичных процессов к изучению неоднородных по времени Марковских цепей, что позволяет применять результаты, полученные для неоднородных Марковских цепей [19,49].

В нашей работе применяются и развиваются результаты, полученные как в алгебраических, траекторных, так и теоретико- вероятностных аспектах.

Перейдем к краткому описанию содержания монографии.

В первой главе изучаются квадратичные операторы, определенные по конструкции, предложенной Ганиходжаевым Н.Н.

В §1.1 описывается конструкция квадратичного стохастического оператора.

Пусть (Λ, L)-конечный граф без петель и кратных ребер, где Λ −множество вершин графа и L-множество ребер.

Пусть *Ф*-некоторое конечное множество, которое называется множеством аллелей. Отображения $\sigma:\Lambda\to\Phi$ называется клеткой. Обозначим через Ω пространство всех клеток и $S(\Lambda,\Phi)$ множество всех вероятностных распределений, заданных на конечном множестве Ω. Квадратичный оператор, переводящий симплекс $S(\Lambda,\Phi)$ в себя, - определяется следующим образом. Пусть $\{\Lambda_i\}$ совокупность связанных компонент графа (Λ, L) *i=1,...,n.* Для двух произвольных клеток $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega$ положим

$$A(\sigma_1, \sigma_2) = \{x \in \Lambda : \sigma_1(x) = \sigma_2(x)\}$$

$$\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) = \bigcup_{j: A(\sigma_1, \sigma_2) \cap \Lambda i \neq \theta}$$

если $\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) \neq \theta$ то положим

$$\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)) = \{\sigma \in \Omega : \sigma_{|\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_{1|\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)} \text{ или } \sigma_{|\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_{2|\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)}\}$$

В случае $\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) \neq \theta$

$$\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)) = \{\sigma \in \Omega : \sigma_{|\Lambda_l} = \sigma_{1|\Lambda_l} \text{ или } \sigma_{|\Lambda_l} = \sigma_{2|\Lambda_l} \text{ для всех } l = 1, \ldots, n\}$$

Пусть теперь $\mu \in S(\Lambda, \Phi)$ -некоторая вероятностная мера, определенная на Ω , такая, что $\mu(\sigma) > 0$ для любой клетки $\sigma \in \Omega$.

Коэффициенты наследственности $P_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma}$ определим следующим образом: $P_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} = \begin{cases} \dfrac{\mu(\sigma)}{\mu(\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)))} \end{cases}$ если $\sigma \in \Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2))$ (0.5)

В остальных случах.

Квадратичный стохастический оператор V, действующий на симплексе $S(\Lambda, \Phi)$ и задаваемый коэффициентами наследственности (0,5), определяется следующим образом: для произвольной меры $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$ мера $V\lambda = \lambda' \in S(\Lambda, \Phi)$ определяется равенством

$$\lambda'(\sigma) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega} P_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma} \lambda(\sigma_1) \lambda(\sigma_2) \qquad (0.6)$$

для любой клетки $\sigma \in \Omega$

Нетрудно проверить, что коэффициенты наследственности удовлетворяют следующим условиям:

$$P_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma} \geq 0, \quad P_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma} = P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}, \quad \sum_{\sigma\in\Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 1$$

По построению квадратичный стохастический оператор (06) зависит от структуры графа (Λ, L) ,множества значений аллелей (спина) Ф и выбора меры μ.

В § 1.2 изучается квадратичные стохастические операторы, построенные по биномиальным распределениям.

Пусть $|\Lambda| = n$ и $\Phi = \{A, a\}$. Для клетки $\sigma \in \Omega$ положим $n_A(\sigma)$– число аллелей А в клетке σ(т.е. число «успехов») и зададим меру $\mu_a(\sigma)$ на Ω как биномиальное распределение

$$\mu_a(\sigma) = p^{n_A(\sigma)} q^{n-n_A(\sigma)}$$

$p \geq 0, p \geq 0, p+q=1$ и $p/q=\alpha$. При $p=q$,т.е. $\alpha=1$, мера μ_1 является равномерным распределением на Ω. Пусть теперь множество ребер графа (Λ, L)-пусто, т.е. Λ -снабжена структурой графа. В этом случае, отождествляя клетки σ_1 и σ_2, у которых $n_A(\sigma_1) = n_A(\sigma_2)$, образуем пространство клеток $\Omega = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, ..., \tilde{\sigma}_n$, где $\tilde{\sigma}_i$ -совокупность клеток с $n_A(.) = l\}$, на котором определено распределение

$$\mu_a(\tilde{\sigma}_l) = c_n^l p^l q^{n-l} \qquad (0.7)$$

Пусть $\tilde{V}_\alpha$ – квадратичный стохастический оператор построенные по биномиальным распределению (07) и действующий на .

$$S(\Omega) = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, i = 1,2,...,n \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Квадратичный стохастический оператор называется менделевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют закону Менделя.

Теорема 1.2.1. квадратичные операторы $\tilde{V}_\alpha$, определенные выше, менделевские при $\alpha = 1$ и $n = 1$или $n = 2$, а при $n = 3$не являются менделевскими.

Менделевость оператора эквивалента тому, что, начиная со второго, шага, последовательность $x^{(k+1)}$ стабилизируется.

Теорема 1.2.2. Для квадратичного оператора $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha = 1$ и $n = 3$ траектория асимптотически стабильна, т.е. $x^{(k)}$ при $k \to \infty$ сходится.

Теорема 1.2.3. Квадратичный оператор $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha = 1$ и $n = 1$ сюрьективен, а при $n = 2$ и $n = 3$ не является сюрьективным.

В §1.3. изучается квадратичные стохастический операторы, соответствующие по модели Поттса.

На множестве клеток Ω рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma) == -J \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \qquad (0.8)$$

Где суммирование проводится по соседним вершинам $\langle x, y \rangle$ и $J \in R$. В статистической механике модель, описываемая гамильтонианом (08), называется моделью Поттса, при этом, если $J > 0$, модель называется ферро магнитной, в противном случае-антиферромагнитной [40]. Гиббсовское распределение, соответствующее этому гамильтониану, задается следующим образом:

$$\mu(\sigma) = -\exp(-H(\sigma))/Z \qquad (0.9)$$

Где $Z = \sum_{\sigma \in \Omega} \exp(-H(\sigma))$

Если $J = 0$или множество ребер графа пусто, то мера μ, очевидно, будет является равномерным распределением на Ω.

В данном параграфе рассмотрим случай, когда граф (Λ, L)состоит из двух вершин, соединенных одним ребром. Тогда Ω состоит из следующих пар $\sigma_1 = (A, A)$; $\sigma_2(A, a)$; $\sigma_3 = (a, A)$; $\sigma_4 = (a, a)$

Квадратичный стохастический оператор V, задаваемый равенствами(0.5),(0.8),(0.9), в этом случае имеет следующий вид: если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$-распределение на Ω и $\lambda' = V\lambda$, то

$$\begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1\left[\lambda_1 + \lambda_4 + \theta e^J(\lambda_2 + \lambda_3)\right] \\ \lambda_2' = \lambda_2\left[\lambda_2 + \lambda_3 + \theta(\lambda_1 + \lambda_4)\right] \\ \lambda_3' = \lambda_3\left[\lambda_2 + \lambda_3 + \theta(\lambda_1 + \lambda_4)\right] \\ \lambda_4' = \lambda_4\left[\lambda_1 + \lambda_4 + \theta e^J(\lambda_2 + \lambda_3)\right] \end{cases} \qquad (0.10)$$

Где $\theta = 2/(e^J + 1)$.

Теорема I.3.I для квадратичного стохастического оператора (0.10) справедливы следующие утверждения:

1) При $J = 0$ все точки симплекса $S(\Lambda,\Phi)$ неподвижны;

2) Для любого J, произвольная точка $\lambda \in S^{(1)}US^{(2)}$ является неподвижной.

3) При $J > 0$ $(J < 0)$ траектория любой точки $\lambda \in S(\Lambda,\Phi)/(S^{(1)}US^{(2)})$ сходится к некоторой точке $\tilde{\lambda} \in S^{(1)}(\tilde{\lambda} \in S^{(2)})$,

Где $S^{(1)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in S(\Lambda,\Phi) : \lambda_2 = \lambda_3 = 0\}$ и

$S^{(2)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in S(\Lambda,\Phi) : \lambda_1 = \lambda_4 = 0\}$

Одной из важных топологических задач является задача выяснить, при каких условиях на преобразование одного множества на другое оно переводит границу на границу, крайние точки в крайние точки и т.д. [23]. Описание условий, при которых преобразование множества в себя, является сюрьективным, относясь к этому классу задач, важно также при изучении биологических моделей. Так, сюрьективность квадратичного стохастического оператора гарантирует, что какая – либо траектория квадратичного стохастического оператора проходит через любую наперед заданную точку симплекса или на языке моделей: выбрав какое-либо начальное распределение на множестве разновидностей через некоторое число шагов можем получить произвольное распределение. Изучению этих вопросов посвящена вторая глава работы.

В параграфе 2.1. рассматривается задача описания квадратичных операторов, являющихся сюрьективными отображениями, т.е. установлены необходимые и достаточные условия, при которых имеет место

$$V\left(S^{n-1}\right)=S^{n-1}$$

Где $S^{n-1} n-1$ - мерным симплексом V-квадратичный оператор, определенный на S^{n-1}.

В данном параграфе мы определим сюрьективные квадратичные операторы, заданные на трехмерном симплексе. Так как S^3 является правильным тетраэдром, для изучения сюрьективных квадратичных операторов применяется теория группы само совмещений правильных многогранников.

Заметим, что под само совмещением понимается перемешивание, т. е. преобразование, сохраняющее метрику. Группа само совмещений тетраэдра в R^3 состоит из 12 элементов ([1]). Но мы рассматриваем симплекс в R^4 и тогда несложно показать, что группа само совмещений тетраэдра G в R^4 состоит из группы всех перестановок вершин этого тетраэдра, т. е. $G=\{\pi_i\}_{i=1}^{24}$.

Будем говорить, что V-квадратичный оператор, определенный на S^{n-1} соответствует некоторому само совмещению π_i. Если V-квадратичный оператор переводит вершины и ребра симплекса S^3 в вершины и ребра симплекса таким же образом, как само совмещение $\pi_i, i=\overline{1,24}$.

Основными результатами параграфе 2.1. являются следующие теоремы:

Теорема 2.1.1. Любой сюрьективный квадратичный операторы, определенный на S^3, соответствует некоторому само совмещению $\pi_i, i=\overline{1,24}$.

Выписан явный вид сюрьективных квадратичных операторов $V_i(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma,\theta)$соответствующих само совмещению $\pi_i, i=\overline{1,24}$.

Например, $V_i(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma,\theta)$ сюрьективные квадратичные операторы,

соответствующие само совмещению π_i

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

имеют следующий вид:

$$V(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\sigma)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \eta & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 1-\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & \xi & 1-\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 1-\xi & 0 & 1-\delta \end{bmatrix}$$

Где $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta \in [0,1]$ -произвольные числа.

Теорема 2.1.2. Любой сюрьективный квадратичный оператор является гомеоморфизмом симплекса S^3.

Теорема 2.1.3. Квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3, сюрьективен тогда и только тогда, когда он биективен

Множество квадратичных операторов является выпуклым, компактным множеством. В § 2.2 рассматривается задача описания крайних точек этого множества. При $n=2,3$ эта задача исследована в (36). Мы рассматриваем случай $n=4$.

В этом параграфе исследованы все крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на симплекса S^3.

Следующая теорема описывает крайние точки множества сюрьективных квадратичных операторов и множества всех квадратичных операторов, определенных на симплексе S^3.

Теорема 2.2.1. Для любого $l=\overline{1,24}$ совокупность крайних точек множества сюрьективных квадратичных операторов $\tilde{v}_l$ состоит из 64 элементов.

Теорема 2.2.2. Совокупность крайних точек множества всех квадратичных операторов, определенных S^3, состоит из $4^{10}=1048576$ элементов, причем $24x2^6=1536$ из них является сюрьективными.

Не являющиеся сюрьективными $4^{10}-24x2^{6}=1047040$ крайние точки описываются следующим образом. Выделено $4^{6}x15=61440$ крайних точек и доказано, что остальные крайние точки получаются из них самосовмещеним; исследованы все 61440 крайние точки.

Пусть (E,m)- произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega=\prod_{l=1}^{\infty}E_l$ где $E=E_l$ для всех натуральных l. Одной из важных проблем как в теории вероятностей, так и в теории меры является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на Е [21]. В [39] была предложена конструкция меры P при помощи квадратичных операторов, названной квадратичной мерой. Эта мера отлична от хорошо изученных Бернуллиевских и Марковских мер. Сложность изучения свойств квадратичных мер такого же порядка, каковы сложность и громоздкость рекурренций при изучении траекторий.

В третьей главе определяется класс квадратичных операторов, для которых изучены эргодические свойства соответствующих квадратичных мер.

Задача изучения свойства мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой главе мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи.

В модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стьюартом (7), передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи. Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей А и a , т.е. в этом случае существуют три генотипа АА, Аa и aa. Квадратичный оператор, определяющий модель наследования в этом случае, определяется следующими переходными аероятностьми:

$P_{AAAA,AA}, P_{AAAa,AA}, P_{AaAa,AA}, P_{AAaa,AA}$ и т.д.-всего 27 переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно, что.

$P_{AAAA,AA}=1,\ P_{AAAa,AA}=1/2,\ P_{AaAa,AA}=1/4, P_{AaAa,AA}=1/4,...P_{aa,aa}=1$

Для упроўения записи вместо $\{AA, Aa, aa\}$ будем рассматривать множество $E = \{1,2,3\}$. Тогда

$$
\begin{array}{llll}
p_{11,1}=1 & p_{12,1}=p_{21,1}=1/2 & p_{13,1}=p_{31,1}=0 & \\
p_{11,2}=0 & p_{12,2}=p_{21,2}=1/2 & p_{13,2}=p_{31,2}=1 & \\
p_{11,3}=0 & p_{12,3}=p_{21,3}=0 & p_{13,3}=p_{31,3}=0 & \\
p_{22,1}=1/4 & p_{23,1}=p_{32,1}=0 & p_{33,1}=0 & \\
p_{22,2}=1/2 & p_{23,2}=p_{32,2}=1/2 & p_{33,2}=0 & \\
p_{22,3}=1/4 & p_{23,2}=p_{32,3}=1/2 & p_{33,3}=1 &
\end{array}
\qquad (0.11)
$$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным (см.Главу 1). Меры, построенное по менделевским квадратичным операторам назовем менделевскими.

Пусть $x^{(0)}=\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)\in S^2$-начальное распределение на $E=\{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$-вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (0.11) и начальному распределению $x^{(0)}=\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)$ основными результатами § 3.1 являются:

Теорема 3.1.1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)}\in S^3$ и любых натуральных к и l имеет место следующее равенство:

Где $a\in M=\{1/2x_2^{(1)},(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1),-1/2(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1),$

$-x_3^{(1)},1/2(x_3-x_1)^2,1/2(x_1+1/2x_2)(x_3-x_1),-(x_1+1/2x_2)^2\}.$

Теорема 3.1.2. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом начальном $x^{(0)}\in S^2$ и любых натуральных $k,l_1,...,l_{n-1}$ и l_n имеет место следующее равенство:

$$
P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2,...,\xi_{k+l_1+...+l_n}=l_n\right)=\prod_{j=1}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_j}=l_j\right)+A_n^{l_n}
$$

Где

$$
A_n^{l_n}=A_{n-1}^{l_{n-1}}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_n}=l_n\right)+a_n/2^{l_n-1}\right]+\frac{\prod_{j=1}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_j}=l_j\right)}{2^{l_n-1}}a_{l_n},\ l_0=0,\ A_0^{l_0}=0, A_0^{l_s}=1
$$

$$
A_1^{l_S}=\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_S}=l_S\right)}{2^{l_S-1}}a_{l_S},1\le S\le n,
$$

$a_{l_n}, a_{l_S}, a_n \in M$

В § 3.2 рассматривается отношение менделевской и бернуллиевской мер на S^2.

Основным результатом § 3.2 является

Теорема 3.2.1. Менделевская мера P и Бернуллиевская мера Q являются сингулярными.

Глава I.

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ .

§ 1.1. Описание конструкции квадратичных стохастических операторов.

Рассмотрим некоторую биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предложим, что каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой единственной из n разновидностей, где 1,2,…,n. Шкала разновидностей («признаков», фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей l и j однозначно определяли вероятность каждой разновидности k для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («коэффициент наследованности») через $p_{lj,k}$. Очевидно, что в этом случае выполнены условия:

$$p_{lj,k} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} p_{l\,j,k} = 1 \text{ для всех } l, j, k$$

Предложим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флюктуациями частот. Тогда ее состояния можно описывать набором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вероятностей разновидностей, т.е. x_l есть доля разновидности l в популяции.

При так называемой панмиксии или случайном скрещивании при фиксированном состоянии $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ родительские пары l и j образуются с вероятностью x_l, x_j и, следовательно,

$$x'_k = \sum_{l,\,j=1}^{n} p_{l,\,j,\,k} x_l x_j \qquad (1.1.1)$$

Будет полной вероятностью к среди непосредственных потомков (27).

Множество $S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_l \ge 0,\ l = 1,2,...,n,\ \sum_{l=1}^{n} x_l = 1 \right\}$ называется n-1 мерным симплексом и так как $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \quad x'_k \ge 0$, то отображению (1.1.1), называемое квадратичным стохастическим оператором, переводит симплекс S^{n-1} в себя.

В этом параграфе приводится общая конструкция квадратичных стохастических операторов (16), а в §1.2 и §1.3 изучаются конкретные классы квадратичных стохастических операторов.

Пусть (Λ, L)-конечный граф без петель и кратных ребер, где Λ- множество вершин графа и L-множество ребер.

Пусть Φ-некоторое конечное множество, которое называется множеством аллелей. Отображения $\sigma : \Lambda \to \Phi$ называется клеткой. Обозначим через Ω пространство всех клеток и S (Λ, Φ)-множество всех вероятностных распределений, заданных на конечном множестве Ω. Квадратичный оператор, переводящий симплекс S (Λ, Φ) в себя, определяется следующим образом. Пусть (Λ_l)- совокупность связанных компонент графе (Λ, L), $l = 1,...,n$. Для произвольных двух клеток $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega$ положим

$$A(\sigma_1, \sigma_2) = \{x \in \Lambda : \sigma_1(x) = \sigma_2(x)\}$$

и

$$\widetilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) = j : A(\sigma_1, \sigma_2) \cap \Lambda_j \ne \theta$$

Если $\widetilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) \ne \theta$, то положим

$$\Omega\left(\Lambda, \widetilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left\{ \sigma \in \Omega : \sigma\big|_{A(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1\big|_{A(\sigma_1,\sigma_2)} \ \text{или}\ \sigma\big|_{A(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_2\big|_{A(\sigma_1,\sigma_2)} \right\}$$

В случае $\widetilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) = \theta$

$$\Omega\left(\Lambda, \widetilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left\{ \sigma \in \Omega : \sigma\big|_{\Lambda_l} = \sigma_1\big|_{\Lambda_l} \ \text{или}\ \sigma\big|_{\Lambda_l} = \sigma_2\big|_{\Lambda_l} \right\} \text{для всех } l = 1,...,n.$$

Пусть теперь $\mu \in S(\Lambda,\Phi)$-некоторая вероятностная мера, определенная на Ω такая, что $\mu(\sigma)>0$ для любой клетки $\sigma \in \Omega$. Коэффициенты наследственности $p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}$ определим следующим образом:

$$P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \left\{ \frac{\mu(\sigma)}{\mu\left(\Omega\left(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)\right)} \right. \text{, если } \Omega\left(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right) \text{ в остальных случаях} \quad (1.1.2)$$

Квадратичный стохастический оператор V, действующий на симплексе $S(\Lambda,\Phi)$ и задаваемый коэффициентами наследственности (1.1.2), определяется следующим образом: для произвольной меры $\lambda \in S(\Lambda,\Phi)$ мера $V\lambda = \lambda' \in S(\Lambda,\Phi)$ определяется равенством

$$\lambda'(\sigma) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\Omega} p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}\lambda(\sigma_1)\lambda(\sigma_2) \qquad (1.1.3)$$

Для любой клетки $\sigma \in \Omega$.

Нетрудно проверить, что коэффициенты наследственности удовлетворяют следующим условиям:

$$p_{\sigma_1\sigma_2\sigma} \geq 0, \ \sum_{\sigma\in\Omega} p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 1 \quad p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = p_{\sigma_2\sigma_1,\sigma} \text{ для всех } \sigma_1,\sigma_2,\sigma \in \Omega$$

По построению квадратичный оператор (1.1.3) зависит от структуры графа (Λ,L), множества значний аллелей (спина) Ф и выбора меры μ.

Квадратичный оператор (1.1.1) называется вольтерровским, если

$$p_{i\,j,k} = \begin{cases} \text{отлично от нуля при } l = k \text{ или } o = л \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Теорема 1.1.1 При $|\Phi|>1$ и $|\Lambda|>1$ квадратичный стохастический оператор (1.1.3) является вольтерровским тогда и только тогда, когда граф (Λ,L)-связанный.

Доказательство. Пусть граф (Λ,L) -связанный. Если $A(\sigma_1,\sigma_2)=\Lambda$, то очевидно, $\Omega\left(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)=\{\sigma_1\}$ и если $A(\sigma_1,\sigma_2)\neq\Lambda$, $A(\sigma_1,\sigma_2)\neq\theta$, то $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)=\Lambda$, откуда $\Omega\left(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)=\{\sigma_1,\sigma_2\}$. Наконец, если $\left(\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)=\theta$, то в силу связности графа $\Omega\left(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)=\{\sigma_1,\sigma_2\}$, откуда следует, что $p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}=0$ при $\sigma\neq\sigma_2$, т.е. соответствующий оператор- вольтерровский. Пусть теперь квадратичный стохастический оператор (1.1.3) является вольтерровским. Тогда в силу того, что мера μ имеет положительную плотность для любых σ_1, σ_2 имеем $\Omega\left(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, что возможно лишь при связности графа (Λ, L). Теорема доказана.

Вид пространства Ф возможных значений $\sigma(x)$, как и в задачах стохастической механики (40), может существенно упростить или усложнисть конструкцию. Из биологической литературы (18) известно, что любой ген может существовать в разных формах аллелей. В популяции наиболее распространены аллели A так называемого «нормального» или «дикого» типа. Всякая другая форма рассматривается как мутантная аллель *a*. Отождествляя мутантные аллели, в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\Phi = \{A, a\}$ состоит из двух точек.

§ 1.2 Квадратичные стохастические операторы, построенные по биномиальным распределениям

Пусть $|\Lambda| = n$ и $\Phi = \{A, a\}$. Для клетки $\sigma \in \Omega$ положим $n_A(\sigma)$- число аллелей A в клеткеи σ (т.е. число «успехов») и зададим меру μ_a на Ω как биномиальное распределение

$$\mu_a(\sigma) = p^{n_A(\sigma)} q^{n - n_A(\sigma)}$$

Где $p \geq 0,\ q \geq 0,\ p + q = 1$ и $p/q = \alpha$. При $p = q$ т.е. $\alpha = 1$, мера μ_1 является равномерным распределением на Ω. Пусть теперь множество ребер графе (Λ, L) пусто, т.е. Λ не снабжено структурной графа. В этом случае, отнождествляя клетки σ_1 и σ_2, у которых $n_A(\sigma_1) = n_A(\sigma_2)$, образуем пространство клеток $\Omega = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, ..., \tilde{\sigma}_n$, где $\tilde{\sigma}_l$-совокупность клеток с $n_A(.) = l\}$, на котором определено распределение

$$\mu_a(\tilde{\sigma}_l) = C_n^l p^l q^{n-1} \qquad (1.2.1)$$

Пусть $\tilde{V}_\alpha$ квадратичный оператор, построенный по распределению (1,2,1) и действующий на

$$S(\Omega)=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n):\ x_l\geq 0,\ l=\overline{0,n},\ \sum_{l=1}^{n}x_l=1\right\}$$

Квадратичный оператор называется менделевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют знаком Менделя (18). Приведем некоторые модели, описываемые квадратичными операторами.

Во всех ниже следующих примерах предполагается, что $p=q=1/2$ и соответствующие множества Λ, с $|\Lambda|=n$ не снабжены структурой графа.

1. Случай $n=1$. В модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стьюартом в 1971 году (18), передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи:

$p_{AA,A}$ - от родителя с генотипом АА ребенку передается аллель А ,

$p_{Aa,A}$ - от родителя с генотипом А*a* ребенку передается аллель А ,

$p_{aa,A}$ - от родителя с генотипом *aa* ребенку передается аллель А .

И тогда $$p_{...,a}=1-p_{...,A} \qquad (1.2.2)$$

Пусть x_1 и x_2-частоты алелей А и *a* соответственно. Тогда, так как (x_1 x_2) $\in S^1$, квадратичный стохастический оператор определяет, как изменяются частоты аллелей от поколения к поколению по формуле (1.1.1)

$$\begin{cases} x_1' = p_{AA,A}x_1^2 + 2p_{Aa,A}x_1x_2 + p_{aa,A}x_2^2 \\ x_2' = p_{AA,a}x_1^2 + 2p_{Aa,a}x_1x_2 + p_{aa,a}x_2^2 \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования вероятности определены следующим образом:

$$\begin{matrix} p_{AA,A}=1 & p_{Aa,A}=1/2 & p_{aa,A}=0 \\ p_{AA,a}=0 & p_{Aa,a}=1/2 & p_{aa,a}=1 \end{matrix} \qquad (1.2.4)$$

Подставляя величины (1.2.4) в (1.2.3), получим $\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 \\ x_2' = x_2^2 + x_1x_2 \end{cases}$

Отсюда, т.к. $x_1 + x_2 = 1$ окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

Т.е. частоты аллелей не изменяются от поколения к поколению, что составляет первое утверждение в законе Харди-Вайнберга.

Предложение 1.2.1. Закон Харди-вайнберга о неизменности частоты аллелей от поколения к поколению справедлив только при менделевском типе наследования.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $p_{AA,A} = a,\ p_{Aa,A} = b,\ p_{aa,A} = c$, тогда утверждение Харди-Вайнберга записывается следующим образом:

$$x = ax^2 + 2bx(1-x) + c(1-x)^2$$

Или после некоторых упрощений

$$x = (a - 2b + c)x^2 + 2(b-c)x + c$$

Тогда неизменность частоты следует при

$$\begin{cases} a - 2b + c \\ 2(b-c) = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a = 1,\ b = 1/2,\ c = 0$ откуда и следует утверждение предложения 1.2.1.

Из (1.2.5) видно, что $V(S^1) = S^1$.

2. Случай $n = 2$. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ - частоты генотипов АА А*a* и *aa* соответственно. Обозначим для краткости генотипы АА, А*a* и *aa* через 1,2 и 3 соответственно. При менделевским типе наследования квадратичный оператор $\{p_{l\,j,k}\}_{l,j,k=1}^{3}$ определяется следующим образом

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Частоты генотипов от поколения к поколению изменяются по формуле (1.1.1). Подставляя в (1.1.1) выше указанные вероятности, получим

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 1/4x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 + 1/2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_3' = 1/4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{cases}$$

Или окончательно

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Чтобы определить частоты генотипов в следующем поколении, в (1.2.6) необходимо подставить $x_1',\ x_2'$ и x_3' вместо $x_1,\ x_2$ и x_3 соответственно, т.е. получим уравнения

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 1/2x_2')^2 \\ x_2'' = 2(x_1' + 1/2x_2')(x_3' + 1/2x_2') \\ x_3'' = (x_3' + 1/2x_2')^2 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Или, подставляя в (1.2.7) выражения (1.2.6) окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2'' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3'' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases}$$

Откуда следует, что частоты генотипов во всех последующих поколениях будут такими же, как в первом поколении. Сформулируем это свойство в виде следующего предложения.

Предложения 1.2.2. устойчивая (стабильная) частота генотипов достигается за одно поколение.

Это предложение есть третье утверждение закона Харди-Вайнберга, правда, чуть в общем виде.

Из (1.2.6) видно что прообраз точки (0;1;0) пуст, откуда следует, что оператор не является сюрьективным отображением.

3.Случай $n=3$. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$- частоты генотипов AAA, A*aa*, A*aa* и aaa соответственно. Обозначим для краткости генотипы AAA, AA*a*, A*aa* и *aaa* через 1,2,3 и 4 соответственно. Несложные вычисления показывают, что соответствующий оператор $\{p_{l\,j,k}\}_{l,j,k=1}^{4}$ определяется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/9 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 1/18 & 0 & 0 \\ 0 & 5/9 & 2/9 & 0 & 1/2 & 2/3 & 1/2 & 4/9 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/9 & 5/9 & 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 4/9 & 2/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Частоты генотипов от поколения к поколению изменяются по формуле (1.1.1). Подставляя в (1.1.1) выше указанные вероятности, получим

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 2/9x_2^2 + 1/3x_1x_3 + 1/9x_2x_3 \\ x_2' = x_1x_2 + 5/9x_2^2 + 4/3x_1x_3 + 8/9x_2x_3 + 2/9x_3^2 + x_1x_4 + 1/3x_2x_4 \\ x_3' = x_1x_4 + 5/9x_3^2 + 4/3x_4x_2 + 8/9x_2x_3 + 2/9x_2^2 + x_3x_4 + 1/3x_1x_3 \\ x_4' = 2/9x_3^2 + x_4^2 + 1/9x_2x_3 + 1/3x_2x_4 + x_3x_4 \end{cases}$$

Упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/3x_2)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) \\ x_2' = (x_1 + 1/3x_2)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/3(x_3 + x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) \\ x_3' = (x_4 + 1/3x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/3(x_2 + x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \\ x_4' = (x_4 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \end{cases} \qquad (1.2.8)$$

Чтобы определить частоты генотипов в следующем поколении, в (1.2.8) необходимо подставить x_1', x_2', x_3' *и* x_4' вместо x_1, x_2, x_3 и x_4 соответственно, т.е. получим уравнения

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 1/3x_2')(x_1' + 2/3x_2' + 1/3x_3') \\ x_2'' = (x_1' + 1/3x_2')(x_4' + 2/3x_3' + 1/3x_2') + 2/3(x_2' + x_3')(x_1' + 2/3x_2' + 1/3x_3') \\ x_3'' = (x_4' + 1/3x_3')(x_1' + 2/3x_2' + 1/3x_3') + 2/3(x_2' + x_3')(x_4' + 2/3x_3' + 1/3x_2') \\ x_4'' = (x_4' + 1/3x_3')(x_4' + 2/3x_3' + 1/3x_2') \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

Или, подставляя в (1.2.9) выражения (1.2.8), окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1'' = 1/3(x_1 + 1/3x_2)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/3(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^3 \\ x_2'' = 1/3(x_1 + 1/3x_2)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/9(x_2 + x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + \\ + 2(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^2 (x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \\ x_3'' = 1/3(x_4 + 1/3x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/9(x_2 + x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + \\ + 2(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^2 \\ x_4'' = 1/3(x_4 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/3(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^3 \end{cases}$$

Методом математической индукции по n можно доказать следующую формулу

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 1/3^n (x_1 + 1/3x_2)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + (3^n - 1)/3^n (x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^3 \\ x_2^{(n+1)} = 1/3^n (x_1 + 1/3x_2)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + 2/3^{n-1}(x_2 + x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + \\ + (3^n - 1)/3^{n-1} (x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^2 (x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) \\ x_3^{(n+1)} = 1/3^n (x_4 + 1/3x_3)(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3) + 2/3^{n-1}(x_2 + x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + \\ + (3^n - 1)/3^{n-1} (x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^2 \\ x_4^{(n+1)} = 1/3^n (x_4 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2) + (3^n - 1)/3^n (x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^3 \end{cases}$$

При $n \to \infty$ получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = (x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^3$$

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = 3(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)^2 (x_4 + 2/3x_2 + 1/3x_3)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_3^{(n)} = 3(x_1 + 2/3x_2 + 1/3x_3)(x_4 + 2/3x_2 + 1/3x_2)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} x_4^{(n)} = (x_4 + 2/3x_3 + 1/3x_2)^3$$

Из (1.2.8) видно, что прообразы точек (0,1,0,0) и (0,0,1,0) являются пустыми множествами, т.е. оператор не является сюрьективным отображением.

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. Квадратичные операторы $\tilde{V}_\alpha$, определенные выше, менделевские при $\alpha = 1$ и $n = 1$ или $n = 2$, а при $n = 3$ не являются менделевскими.

Менделевость оператора эквивалентна тому, что, начиная совторого шага, последовательность $x^{(k+1)}$ стабилизируется.

Теорема 1.2.2. Для квадратичного оператора $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha = 1$ и $n = 3$, траектория асиптотически стабильна, т.е. $x^{(k)}$ при $k \to \infty$ сходится.

Теорема 1.2.3. Квадратичный оператор $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha = 1$ и $n = 1$ сюрьективен, а при $n = 2$ и $n = 3$ не является сюрьективным.

§ 1.3. Квадратичные стохастические операторы, соответствующие модели Поттса.

На множестве клеток Ω рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma) = -j \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \qquad (1.3.1)$$

Где суммирование проводится по соседним вершинам $\langle x, y \rangle$ и $J \in R$. В статистической механике модель, описываемая гамильтонианом (3.1), называется моделью Поттса, при этом, если $J > 0$, модель называется ферримагнитной, в противном случае- антиферромагнитной. Гиббсовское распределение, соответствующее этому гамильтониану, задается следующим образом:

$$\mu(\sigma) = \exp(-H(\sigma))/Z$$

Где $Z = \sum_{\sigma \in \Omega} \exp(-H(\sigma))$

Если $J = 0$ или множество ребер графа пусто, то мера μ, очевидно, будет являться равномерным распределением на Ω.

В данном параграфе рассмотрим случай, когда граф (A,L) состоит из двух вершин, соединенных одним ребром. Тогда Ω состоит из следующих пар

$\sigma_1 = (A, A)$; $\sigma_2 = (A, a)$; $\sigma_3 = (a, A)$; $\sigma_4 = (a, a)$.

Квадратичный стохастический оператор V, задаваемый равенствами (1.3), в этом случае имеет следующий вид: если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$- распределение на Ω и $\lambda' = V\lambda$, то

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_1\left[\lambda_1 + \lambda_4 + \theta e^J (\lambda_2 + \lambda_3)\right] \\ \lambda_2' &= \lambda_2\left[\lambda_2 + \lambda_3 + \theta(\lambda_1 + \lambda_4)\right] \end{aligned} \qquad (1.3.3.)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3' &= \lambda_3\left[\lambda_2 + \lambda_3 + \theta(\lambda_1 + \lambda_4)\right] \\ \lambda_4' &= \lambda_4\left[\lambda_1 + \lambda_4 + \theta e^J (\lambda_2 + \lambda_3)\right] \end{aligned}$$

Где $\theta = 2/\left(e^J + 1\right)$.

Положим $\lambda_2 + \lambda_3 = x,\ \lambda_1 + \lambda_4 = 1 - x$.

Система (1.3.3.3) в этих обозначениях сводится к следующему

$$j(x) = x' = (1-\theta)x^2 + \theta x \quad (1.3.4)$$

Тогда каждая неподвижная или периодическая точка отображения (1.3.4) определяет множества неподвижных или периодических точек отображения (1.3.3).

Рассмотрим

$$x = (1-\theta)x^2 + \theta x \quad (1.3.5.)$$

Очевидно, что при $J \neq 0$ $x = 0$ и $x = 1$ являются решениями (1.3.5) и при $J = 0$ произвольная точка является неподвижной точкой отображения (1.3.4). заметим, что

$$\begin{cases} j'(0) < 1,\ \ j'(1) > 1,\ если\ J > 0 \\ j'(0) = j'(1) = 1,\ \ если\ J = 0 \\ j'(0) > 1,\ \ j'(1) < 1 если\ J < 0 \end{cases}$$

Следовательно, при $J > 0$ точка $x = 0$ притягивающая, а $x = 1$ отталкивающая; при $J = 0$ все точки неподвижные, а при $J < 0$, $x = 1$ притягивающая, а $x = 0$ отталкивающая.

Таким образом, если $x_0 \geq 0$ произвольная точка, то

$$\lim_{n\to\infty} j^{(n)}(x_0) = \begin{cases} 0,\ если\ \ J > 0 \\ x_0,\ если\ \ J = 0 \\ 1,\ если\ \ J < 0 \end{cases} \quad (1.3.6.)$$

Положим $S^{(1)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in S(\Lambda, \Phi) : \lambda_2 = \lambda_3 = 0\}$ и

$$S^{(2)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in S(\Lambda, \Phi) : \lambda_1 = \lambda_4 = 0\}$$

В силу (1.3.3) нетрудно проверить, что для любого распределения $\lambda \in S^{(1)} \bigcup S^{(2)}$ $V\lambda = \lambda$, и при $J = 0$ $V\lambda = \lambda$ для любого распределения $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$.

Для точки $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$ рассмотрим траекторию квадратичного оператора V (1.3.3): $\lambda^{(n)} = V\lambda^{(n-1)},\ n = 1,2,...,$ где $\lambda^{(0)} = \lambda$. В силу (1.3.6) при $J > 0$ траектория любой точки $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$ сходится к некоторой точке множества $S^{(1)}$, и при этом, если $\lambda \in S^{(1)}$, то это точка неподвижна; при $J = 0$ любая точка $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$

неподвижна и при $J<0$ траектория любой точки $\lambda \in S(\Lambda,\Phi)$ сходится к некоторой точке множества $S^{(2)}$, и при этом, если $\lambda \in S^{(2)}$, то эта точка неподвижна.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема: 1.3.1. Для квадратичного стохастического оператора (1.3.3) справедливы следующие утверждения:

1) При $J=0$ все точки симплекса $S(\Lambda,\Phi)$ неподвижны;

2) Для любого J, произвольная точка $\lambda \in S^{(1)} \cup S^{(2)}$является неподвижной.

3) При $J>0$($J<0$) траектория любой точки $\lambda \in S(\Lambda,\Phi)/S^{(1)} \cup S^{(2)}$ сходится к некоторой точке $\tilde{\lambda} \in S^{(1)}\left(\tilde{\lambda} \in S^{(2)}\right)$.

ГЛАВА II

КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА S^3.

В этой главе исследуются следующие задачи, связанные с изучением субъективных квадратичных операторов и крайних точек множества квадратичных операторов.

В параграфе 2.1 рассматривается задача описания квадратичных операторов, являющихся субъективными отображениями, т.е. установлены необходимое и достаточные условия, при которых имеет место

$$V\left(S^{n-1}\right)=S^{n-1}$$

Где S^{n-1} симплекс и V- квадратичный оператор, определенный на S^{n-1}.

Множество квадратичных операторов является выпуклым, компактным множеством, и в параграфе 2.2 рассматривается задача описания крайних точек этого множества. При $n=2$ и $n=3$ эта задача исследована в [36]. Мы рассматриваем случай $n=4$.

§ 2.1. ОПИСАНИЕ КЛАССА СЮРЬЕКТИВНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА S^3.

На $S^3=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_l\geq 0,\ l=\overline{1,4};\ \sum_{l=1}^{4}x_l=1\right\}$ произвольный квадратичный оператор V, заданный следующим образом

$$(Vx)_k=\sum_{l,j=1}^{4}P_{lj,k}\,x_l x_j,\ k=\overline{1,4} \qquad (2.1)$$

Где $P_{l\,j,k}\geq 0,\ P_{l\,j,k}=P_{j\,l,k},\quad \sum_{l,j=1}^{4}P_{l\,j,k}=1$

Однозначно определяется следующей матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc}
P_{11,1} & P_{22,1} & P_{33,1} & P_{44,1} & P_{12,1} & P_{13,1} & P_{14,1} & P_{23,1} & P_{24,1} & P_{34,1}\\
P_{11,2} & P_{22,2} & P_{33,2} & P_{44,2} & P_{12,2} & P_{13,2} & P_{14,2} & P_{23,2} & P_{24,2} & P_{34,2}\\
P_{11,3} & P_{22,3} & P_{33,3} & P_{44,3} & P_{12,3} & P_{13,3} & P_{14,3} & P_{23,3} & P_{24,3} & P_{34,3}\\
P_{11,4} & P_{22,4} & P_{33,4} & P_{44,4} & P_{12,4} & P_{13,4} & P_{14,4} & P_{23,4} & P_{24,4} & P_{34,4}
\end{array}\right]$$

Где $0 \le p_{l\,j,k} \le 1$.

В этом параграфе мы определим 24 класса сюрьективных квадратичных операторов и докажем, что они исчерпывают все множество сюрьективных квадратичных операторов. Для описания этих классов воспользуемся хорошо известными группами само совмещений правильных многогранников [1], так как S^3 является правильным тетраэдром.

Заметим, что под само совмещением понимается перемещение, т.е. преобразование, сохраняющее метрику. Группа само совмещений тетраэдра в R^3 состоит из 12 элементов. Но мы рассматриваем симплекс в R^4 тогда несложно показать, что группа само совмещений тетраэдра, G в R^4 состоит из группы всех перестановок вершин этого тетраэдра т.е. $G = \{\pi_l\}_{l=1}^{24}$.

Будем говорить, что квадратичный оператор V, определенный на симплексе S^3, соответствует некоторому само совмещению π_l, если V переводит вершины симплекса S^3 в вершины и ребра симплекса в ребра таким же образом, как само совмещение $\pi_l, l = \overline{1,24}$.

Докажем, что любой сюрьективный квадратичный оператор соответствует некоторому само совмещению.

Теорема 2.1.1. Любой сюрьективный квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3, соответствует некоторому само совмещению $\pi_l, l = \overline{1,24}$.

Доказательство теоремы 2.1.1 сведем к доказательству следующих трех лемм.

Лемма 2.1.1. Пусть V-сюрьективный квадратичный оператор. Тогда никакая внутренняя точка симплекса S^3 не может перейти при отображении V в одну из вершин симплекса.

Доказательство. Пусть $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in IntS^3$ и $V(A) = A_l$ для некоторого $l = 1,2,3,4$ где A_l вершины. Рассмотрим случай $l = 1$ (остальные случаи рассматриваются точно так же). Из равенства $V(A) = A_l$ следует, что

$$1 = a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\xi_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4$$

$$0 = a_2x_1^2 + b_2x_2^2 + c_2x_3^2 + d_2x_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\xi_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4$$

$$0 = a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3x_3^2 + d_3x_4^2 + 2\alpha_3x_1x_2 + 2\beta_3x_1x_3 + 2\gamma_3x_1x_4 + 2\xi_3x_2x_3 + 2\eta_3x_2x_4 + 2\delta_3x_3x_4$$

$$0 = a_4x_1^2 + b_4x_2^2 + c_4x_3^2 + d_4x_4^2 + 2\alpha_4x_1x_2 + 2\beta_4x_1x_3 + 2\gamma_4x_1x_4 + 2\xi_4x_2x_3 + 2\eta_4x_2x_4 + 2\delta_4x_3x_4$$

И т.к. $x_1x_2x_3x_4 > 0$, то отсюда следует, что

$$\alpha_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \xi_1 = \eta_1 = \delta_1 = 1$$

$$\alpha_l = b_l = c_l = d_l = \alpha_l = \beta_l = \gamma_l = \xi_l = \eta_l = \delta_l = 0 \qquad l = 2,3,4$$

Тогда для любой точки $A \in S^3$, $V(A) = A_1$, т.е. $V(S^3) = A_1$ что противоречит его сюрьективности.

Лемма 2.1.2. Пусть V сюрьективный квадратичный оператор. Тогда никакая внутренная точка симплекса S^3 не может перейти при отображении V в граничную точку симплекса.

Доказательство. Пусть $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in IntS^3$, т.е. $x_1x_2x_3x_4 > 0$.

Положим для определенности, что $V(A) \in [A_3, A_4]$ тогда из равенства

$$x_1' = 0 = \alpha_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\xi_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4$$

$$x_2' = 0 = \alpha_2x_1^2 + b_2x_2^2 + c_2x_3^2 + d_2x_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\xi_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4$$

следует, что

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \xi_1 = \eta_1 = \delta_1 = 0$$

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \xi_2 = \eta_2 = \delta_2 = 0$$

Тогда для любой точки $A \in S^3$ получим $V(A) \in [A_3, A_4]$ т.е. $V(S^3) \in [A_3, A_4]$, что противоречит сюрьективности.

Лемма 2.1.3. Пусть V- сурьективный квадратичный оператор. Тогда никакая граничная точка, отличная от вершин, не может перейти при отображении V в одну из вершин симплекса.

Доказательство. Пусть $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \partial S^3$, $A \neq A_l$, $l = 1,2,3,4$ и предложим для определенности $A \in [A_1, A_4]$. Мы должны доказать, что $V(A) \neq A_l$, $l = 1,2,3,4$. Предложим противное и пусть для определенности $V(A) = A_1$. Тогда

$$1 = \alpha_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\xi_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4$$

$$0=\alpha_2 x_1^2+b_2 x_2^2+c_2 x_3^2+d_2 x_4^2+2\alpha_2 x_1 x_2+2\beta_2 x_1 x_3+2\gamma_2 x_1 x_4+2\xi_2 x_2 x_3+2\eta_2 x_2 x_4+2\delta_2 x_3 x_4$$
$$0=\alpha_3 x_1^2+b_3 x_2^2+c_3 x_3^2+d_3 x_4^2+2\alpha_3 x_1 x_2+2\beta_3 x_1 x_3+2\gamma_3 x_1 x_4+2\xi_3 x_2 x_3+2\eta_3 x_2 x_4+2\delta_3 x_3 x_4$$
$$0=\alpha_4 x_1^2+b_4 x_2^2+c_4 x_3^2+d_4 x_4^2+2\alpha_4 x_1 x_2+2\beta_4 x_1 x_3+2\gamma_4 x_1 x_4+2\xi_4 x_2 x_3+2\eta_4 x_2 x_4+2\delta_4 x_3 x_4$$

откуда $a_1=b_1=c_1=d_1=\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=\xi_1=\eta_1=\delta_1=0$, $l=2,3,4$.

Следовательно, для любой точки $A\in[A_1,A_4]$, $V(A)=A_1$, т.е. $V([A_1,A_4])=A_1$ что, как легко видеть, противоречит сюрьективности.

Доказательство теоремы 2.1.1. В силу лемм 2.1.1-2.1.3 сюрьективный квадратичный оператор переводит вершины симплекса в вершины и ребра в ребра, т.е. сюрьективному квадратичному оператор соответствует некоторое само совмещение π_l, $l=\overline{1,24}$.

Определим теперь, какого вида квадратичные операторы соответствуют каждому само совмещению правильного тетраэдра.

Начнем с тождественного само совмещения π_1. Квадратичный оператор V, соответствующий этому само совмещению, должен удовлетворять следующим условиям: $V(A_l)=A_l$, $l=1,2,3,4$ и также

$$V([A_1,A_2])=[A_1,A_2],\ V([A_1,A_3])=[A_1,A_3], V([A_1,A_4])=[A_1,A_4]$$
$$V([A_2,A_3])=[A_2,A_3],\ V([A_2,A_4])=[A_2,A_4], V([A_3,A_4])=[A_3,A_4]$$

Если переписать эти условия с помощью (2.1.1), учитывая, что $A_1(1,0,0,0), A_2(0,1,0,0), A_3(0,0,1,0), A_4(0,0,0,1)$ то получим следующие соотношения:

$$\begin{array}{llll} P_{11,1}=1 & P_{22,1}=0 & P_{33,1}=0 & P_{44,1}=0 \\ P_{11,2}=0 & P_{22,2}=1 & P_{33,2}=0 & P_{44,2}=2 \\ P_{11,3}=0 & P_{22,3}=0 & P_{33,3}=1 & P_{44,3}=0 \\ P_{11,4}=0 & P_{22,4}=0 & P_{33,4}=0 & P_{44,4}=1 \end{array} \qquad (2.1.4)$$

Теперь, так как произвольная точка, принадлежащая ребру $[A_1,A_2]$ имеет координаты $(x_1,1-x_1,0,0)$ то из $V([A_1,A_2])=[A_1,A_2]$ имеем

$$0=x_3'=P_{11,3}x_1^2+P_{22,3}(1-x_1)^2+2P_{12,3}x_1(1-x_1)$$
$$0=x_4'=P_{11,4}x_1^2+P_{22,4}(1-x_1)^2+2P_{12,4}x_1(1-x_1)$$

И из (2.1.1) следует, что $2P_{12,3}=0$, $2P_{12,4}=0$ откуда $P_{12,3}=0, P_{12,4}=0$; аналогично из $V([A_1,A_3])=[A_1,A_3]$, $V([A_1,A_4])=[A_1,A_4]$, $V([A_2,A_3])=[A_2,A_3]$, $V([A_2,A_4])=[A_2,A_4]$, $V([A_3,A_4])=[A_3,A_4]$.

Имеем

$$P_{23,1}=0 \quad P_{24,1}=0 \quad P_{34,1}=0 \quad P_{13,2}=0 \quad P_{14,2}=0$$

$$P_{14,3}=0 \quad P_{24,3}=0 \quad P_{34,2}=0 \quad P_{13,4}=0 \quad P_{23,2}=0$$

Таким образом, квадратичные операторы, соответствующие самосовмещению π_1, имеют следующий вид:

$$V_1(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 1-\xi & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\eta & 1-\delta \end{bmatrix}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta\in[0,1]$- произвольные числа.

Очевидно, что выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов, соответствующих само совмещению π_1, также соответствует этому само совмещению.

Покажем, что квадратичный оператор $V_1(1/2,\ 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ отвечающий само совмещению π_1, совпадает с само совмещением π_1. Действительно, при $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta=1/2$ квадратичный оператор $V_1(1/2,\ 1/2, 1/2, 1/2, 1/2,1/2)$ является тождественным оператором, т.к.

$$\begin{cases} x_1'=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4 \\ x_2'=x_2^2+x_1x_2+x_2x_3+x_2x_4 \\ x_3'=x_3^2+x_1x_3+x_2x_3+x_3x_4 \\ x_4'=x_4^2+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1'=x_1\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right) \\ x_2'=x_2\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right) \\ x_3'=x_3\left(x_1+x_2+x_3x_4\right) \\ x_4'=x_4\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right) \end{cases}$$

откуда в силу того, что $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, получим, что $V_1(1/2,\ 1/2, 1/2, 1/2, 1/2,1/2)$ совпадает с само совмещением π_1.

Для квадратичных операторов класса $V_1(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$ преобразование (2.1.1) принимает вид:

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2\alpha\, x_1 x_2 + 2\beta\, x_1 x_3 + 2\gamma\, x_1 x_4 \\ x_2' = x_2^2 + 2\,(1-\alpha)\, x_1x_2 + 2\xi\, x_2x_3 + 2\ \eta\, x_2x_4 \\ x_3' = x_3^2 + 2(1-\beta)x_1x_3 + 2(1-\xi)\, x_2x_3 + 2\delta x_3x_4 \\ x_4' = x_4^2 + 2(1-\gamma)x_1x_4 + 2(1-\eta)x_4x_2 + 2(1-\delta)x_3x_4 \end{cases}$$

Откуда после некоторых преобразований получаем

$$\begin{cases} x_1' = x_1\left[1+(2\alpha-1)x_2 + (2\beta-1)x_3 + (2\gamma-1)x_4\right] \\ x_2' = x_2\left[1+(1-2\alpha)x_1 + (2\xi-1)x_3 + (2\eta-1)x_4\right] \\ x_3' = x_3\left[1+(1-2\beta)x_1 + (1-2\xi)x_2 + (2\delta-1)x_4\right] \\ x_4' = x_4\left[1+(1-2\gamma)x_1 + (1-2\eta)x_2 + (1-2\delta)x_3\right] \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

Квадратичный оператор вида (2.1.5) относится к классу вольтеровских операторов. Этот класс операторов рассмотрен в (14). В частности, для вольтеровских квадратичных операторов доказано, что операторы такого типа являются взаимно однозначными и, взаимно непрерывными операторами (14). Отсюда имеем следующее.

Предложение 2.1.1. Любой сюрьективный квадратичный оператор, соответствующий само совмещению π_1, является гомеоморфизмом симплекса S^3.

Не повторяя достаточно простых выкладок, проделанных выше, приведем описание классов сюрьективных квадратичных операторов, соответствующих остальным самосовмещениям $\pi_l,\ l=\overline{2,24}$. Сюрьективный квадратичный оператор $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$, соответствующий самосовмещению π_1, определяется следующим образом.

Рассмотрим случай, когда π_1, имеет следуюший вид:

(остальные случаи рассматриваются аналогично).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.1.6)$$

Квадратичный оператор $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$ соответствуещий этому само совмещению, имеет следующий вид:

Самосовмещению, имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \eta & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 1-\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & \xi & 1-\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 1-\xi & 0 & 1-\delta \end{bmatrix} \qquad (2.1.7)$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta \in [0,1]$ - произвольные числа.

В этом случае преобразование (2.1.1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x_1' = x_4^2 + 2\,\eta\,x_4 x_2 + 2\,\eta\,x_1 x_4 + 2\,\delta\,x_3 x_4 \\ x_2' = x_1^2 + 2(1-\gamma)x_1 x_4 + 2\alpha\,x_2 x_1 + 2\beta\,x_1 x_3 \\ x_3' = x_2^2 + 2(1-\alpha)x_1 x_2 + 2(1-\eta)x_2 x_4 + 2\xi\,x_3 x_2 \\ x_4' = x_3^2 + 2(1-\beta)x_1 x_3 + 2(1-\xi)x_3 x_2 + 2(1-\delta)x_3 x_4 \end{cases}$$

Откуда после некоторых преобразований получаем

$$\begin{cases} x_1' = x_4\left[1+(2\gamma-1)x_1+(2\eta-1)x_2+(2\delta-1)x_3\right] \\ x_2' = x_1\left[1+(1-2\gamma)x_2+(2\beta-1)x_3+(2\alpha-1)x_2\right] \\ x_3' = x_2\left[1+(1-2\alpha)x_1+(1-2\eta)x_4+(2\xi-1)x_3\right] \\ x_4' = x_3\left[1+(1-2\beta)x_1+(1-2\xi)x_2+(1-2\delta)x_4\right] \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при $\alpha=\beta=\gamma=\xi=\eta=\delta=1/2$ квадратичный оператор (2.1.7) совпадает с самосовмещением (2.1.6). аналогично в остальных случаях при $\alpha=\beta=\gamma=\xi=\eta=\delta=1/2$ квадратичный оператор $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$ совпадает с самосовмещением $\pi_l,\ l=\overline{1,24}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, можно дать описание классов сюрьективных квадратичных операторов, соответствующих остальным самосовмещениям $\pi_l,\ l=\overline{1,24}$.

Обозначим через $\tilde{v}_l$ совокупность всех сюрьективных квадратичных операторов вида $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta),\ l=\overline{1,24}$.

Из построения следует

Предложения 2.1.2. Для любого $l=\overline{1,24}$ выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов из $\tilde{v}_l$ опять принадлежить $\tilde{v}_l$.

Теорема 2.1.2. Любой сюрьективный оператор является гомеоморфизмом симплекса S^3.

Доказательство. Из теоремы 2.1.1 следует, что произвольный сюрьективный квадратичный оператор принадлежит одному из классов $\tilde{v}_l$, $l=\overline{1,24}$. При $l=1$ это утверждение доказано в предложении 2.1.1.

Пусть $l\neq 1$. Тогда квадратичный оператор $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$ является композицией двух преобразований.

$V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)=V_1(1/2,\ 1/2,1/2,1/2,1/2,1/2)V_1(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$. Здесь оператор $V_1(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$ является гомеоморфизмом в силу предложения 2.1.1, а преобразование $V_1(1/2,\ 1/2,1/2,1/2,1/2,1/2)$, совпадающее с самосовмещением π_l, очевидно, является гомеоморфизмом. Так как композиция двух гомеоморфизмов является гомеоморфизмом, то отсюда следует утверждение теоремы 2.1.2.

В качестве следствия приведем следующую теорему.

Теорема 2.1.3. Квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3, сюрьективен тогда и только тогда, когда он биективен.

Доказательство. Из рассмотренных выше случаев видно, что квадратичные операторы V_l из $\tilde{v}_l$ при любых $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta\in[0,1]$ являются взаимнооднозначными отображениями симплекса S^3 на S^3.

§ 2.2. Крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на S^3.

В этом параграфе мы дадим полное описание всех крайних точек множества квадратичных операторов, определенных на S^3**.**

В § 2.1 было дано полное описание множества всех сюрективных квадратичных операторов, определенных на S^3. Было доказано, что это множество состоит из 24 классов $\tilde{v}_l$, $l=\overline{1,24}$ таких, что каждый оператор $V\in\tilde{v}_l$ соответствует самосовмещению π_l, $l=\overline{1,24}$.

Следующая теорема описывает крайние точки множества сюрьективных квадратичных операторов.

Теорема 2.2.1. Для любого $l=\overline{1{,}24}$ совокупность крайних точек множества $\tilde{v}_l$ сюрьективных квадратичных операторов состоит из 64 элементов.

Доказательство. Каждое множество $\tilde{v}_l$, $l=\overline{1{,}24}$ состоит из квадратичных операторов $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$, соответствующих самосовмещению π_l, где $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta\in[0{,}1]$.

Рассмотрим совокупность квадратичных операторов

$$\{V_1(1,0,0,0,0,0);\quad V_2(0,1,0,0,0,0);\ldots;V_6(0,0,0,0,0,1);\ V_7(1,1,0,0,0,0);$$
$$V_8(1,0,1,0,0,0);\ldots;\ V_{21}(0,0,0,0,1,1);\quad V_{22}(1,1,1,0,0,0);\ V_{23}(1,1,0,1,0,0);\ldots$$
$$V_{41}(0,0,0,1,1,1);\ \ V_{42}(1,1,1,1,0,0);\ \ V_{43}(1,1,1,0,1,0);\ldots;V_{56}(0,0,1,1,1,1);$$
$$V_{57}(1,1,1,1,1,0);\ \ V_{58}(1,1,1,1,0,1);\ldots;V_{62}(0,1,1,1,1,1);\ \ V_{63}(1,1,1,1,1,1);$$
$$V_{64}(0,0,0,0,0,0)\}$$

Все эти операторы принадлежат одному и тому же классу $\tilde{v}_l$.

Каждый квадратичный оператор, определенный на S^3, принадлежащий классу $\tilde{v}_l$, является выпуклой комбинацией квадратичных операторов V_l при $l=\overline{1{,}64}$ и при этом не является таковой для любого меньшего числа операторов.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{64}\lambda_j V_j = V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta) \qquad (2.2.1)$$

где $\lambda_l \geq 0$ и $\sum_{l=1}^{64}\lambda_l = 1$.

Очевидно, что ни одно V_l, $l=\overline{1{,}64}$ не является выпуклой линейной комбинацией остальных операторов. Например, покажем, что $V_{64}\in\tilde{v}_1$

$$V_{64}(0,0,0,0,0,0):\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Не является выпуклой линейной комбинацией $V_l\in\tilde{v}_1$ $l=\overline{1{,}63}$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Пусть $V_{64} = \sum_{l=1}^{63} \lambda_l V_l$.

Тогда из представлений V_{64} имеем 30 уравнений с правой частью, равной нулю, и $\sum_{l=1}^{63} \lambda_l = 1$. $\lambda_l \geq 0$.

Очевидно, что система не имеет решений, т.к. из 30 уравнений и последних неравенств следует $\lambda_l = 0$ для всех $l = \overline{1,63}$ что противоречит $\sum_{l=1}^{63} \lambda_l = 1$

Разрешимость (2.2.1) легко следует из следующего замечания. Рассмотрим шестимерный куб

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6);\ 0 \leq y_l \leq 1,\ l = \overline{1,6}\}.$$

Очевидно, точки

$$\begin{aligned}
&\{B_1(1,0,0,0,0,0);\quad B_2(0,1,0,0,0,0);\ldots; B_6(0,0,0,0,0,1);\ B_7(1,1,0,0,0,0);\\
&B_8(1,0,1,0,0,0);\ldots;\ B_{21}(0,0,0,0,1,1);\quad B_{22}(1,1,1,0,0,0);\ B_{23}(1,1,0,1,0,0);\ldots\\
&B_{41}(0,0,0,1,1,1);\ \ B_{42}(1,1,1,1,0,0);\ \ B_{43}(1,1,1,0,1,0);\ldots; B_{56}(0,0,1,1,1,1);\\
&B_{57}(1,1,1,1,1,0);\ \ B_{58}(1,1,1,1,0,1);\ldots; B_{62}(0,1,1,1,1,1);\ \ B_{63}(1,1,1,1,1,1);\\
&B_{64}(0,0,0,0,0,0)\}
\end{aligned}$$

Являются крайними точками куба, и любая точка $C(a,b,c,d,e,f)$ является выпуклой комбинацией этих крайних точек, т.е. существуют неотрицательные V_l , $l = \overline{1,64}$ такие, что

$$C = \sum_{l=1}^{64} \lambda_l B_l$$

Координатная запись этого соотношения не что иное, как система (2.2.1), откуда и следует утверждение теоремы 2.2.1.

Теорема 2.2.2. Совокупность крайних точек множества всех квадратичных операторов, определенных на S^3, состоит из $4^{10} = 1048576$ элементов, причем $24x2^6 = 1536$ из них является сюрьективными.

Доказательство. Квадратичный оператор определяется матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} P_{11,1} & P_{22,1} & P_{33,1} & P_{44,1} & P_{12,1} & P_{13,1} & P_{14,1} & P_{23,1} & P_{24,1} & P_{34,1} \\ P_{11,2} & P_{22,2} & P_{33,2} & P_{44,2} & P_{12,2} & P_{13,2} & P_{14,2} & P_{23,2} & P_{24,2} & P_{34,2} \\ P_{11,3} & P_{22,3} & P_{33,3} & P_{44,3} & P_{12,3} & P_{13,3} & P_{14,3} & P_{23,3} & P_{24,3} & P_{34,3} \\ P_{11,4} & P_{22,4} & P_{33,4} & P_{44,4} & P_{12,4} & P_{13,4} & P_{14,4} & P_{23,4} & P_{24,4} & P_{34,4} \end{array}\right]$$

Все элементы которой неотрицательны и сумма стоблцов равна единице. Рассмотрим множество всех стохастических по столбцам матриц 4х4. Очевидно, что это множество имеет $4^4 = 256$ крайних точек.

Так как матрица (2.2.2.) составлена из двух стохастических по столбцам матриц 4х4 и 4х6, то общее число крайних точек равно $4^{10} = 1048576$. Из них как показано в теореме 2.2.1, 1536 крайних точек определяют сюрьективные квадратичные операторы. Остается описать 1047040 оставшихся крайних точек.

Пусть $H_1 = \{e_l\} \overset{256}{l=1}$ и $H_2 = \{f_j\} \overset{4096}{j=1}$ совокупность всех крайних точек множества стохастических по столбцам матриц 4х4 и 4х6 соответственно. Для определения действия группы самосовмещений $G = \{\pi_k\} \overset{24}{k=1}$ на H_1 явно пишем все элементы

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ e_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ e_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{13}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{14}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{15}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix},\quad e_{16}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{17}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{18}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{19}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},\quad e_{20}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},\quad e_{23}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{24}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{25}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},\quad e_{26}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad e_{27}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad e_{28}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{30}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{31}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\quad e_{32}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{33}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{34}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\quad e_{35}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad e_{36}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{37}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\quad e_{38}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad e_{39}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad e_{40}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{41}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{42}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{43}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{44}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{45}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{46}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{47}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{48}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{49}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{50}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{51}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{52}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{53}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{54}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{55}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ e_{56}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{57}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{58}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ e_{59}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{60}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{61}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ e_{62}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{63}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{64}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{65}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{66}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{67}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{68}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{69} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{70} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_{71} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{72} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{73} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_{74} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{75} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{76} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{77} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{78} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{79} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{80} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{81} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{82} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{83} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{84} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{85} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, e_{86} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, e_{87} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_{88} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_{89} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{90} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, e_{91} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{92} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_{93} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{94} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{95} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{96} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{97}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{98}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ e_{99}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{100}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{101}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ e_{102}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{103}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{104}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{105}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{106}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{107}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{108}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$e_{109}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ e_{110}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{111}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{112}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{113}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{114}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{115}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{116}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{117}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{118}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{119}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{120}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{121}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{122}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{123}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{124}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{125}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{126}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{127}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{128}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{129}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{130}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{131}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{132}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{133}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{134}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{135}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{136}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{137}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{138}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{139}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{140}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{141}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{142}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{143}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{144}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{145}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{146}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{147}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{148}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{149}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{150}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{151}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{152}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{153}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{154}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{155}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{156}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{157}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{158}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{159}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ e_{160}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{161}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{162}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{163}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{164}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{165}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{166}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{167}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{168}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{169}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{170}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{171}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{172}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{173}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{174}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{175}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{176}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{177}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{178}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{179}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{180}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{181}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{182}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{183}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{184}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{185}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{186}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{187}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{188}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{189}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{190}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{191}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{192}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{193}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{194}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{195}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{196}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{197}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{198}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{199}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{200}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{200}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{202}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{203}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{204}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{205}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{206}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{207}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\ e_{208}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{209}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{210}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{211}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{212}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{213}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{214}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{215}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{216}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{217}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{218}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{219}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{220}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{221}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{222}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{223}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{224}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{225}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{226}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{227}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{228}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{229}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{230}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{231}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{232}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{233}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{234}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{235}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{236}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{237}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{238}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{239}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{240}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{241}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{242}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{243}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{244}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e_{245}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{246}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{247}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{248}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e_{249}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{250}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{251}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ e_{252}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$e_{253}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ e_{254}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ e_{255}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ e_{256}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Самосовмещения π_k определяются квадратичными матрицами, задающими перестановки координат следующим образом: $\pi_k = e_{232+k}, k = \overline{1,24}$, и тогда действие группы $G = \{\pi_k\}_{k=1}^{24}$ на H_1 определяется следующей формулой: для любого $e_l \in H_1$ и для любого $\pi_j \in G$ положим $\pi_j(e_l) = \pi_j e_l$. Тогда под траекторией группы G, начинающейся в точке $e_k \in H_1$ понимается множество

$$\{e_k = \pi_1(e_k),\ \pi_2(e_k), \ldots, \pi_{24}(e_k)\} \subset H_1$$

Рассмотрим траектории группы G и H_1. Легко проверить, что

$$\{G(e_1)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$\{G(e_{12n+5})\}_{n=0}^{6}=\{e_{12n+5},\ e_{12n+6},\dots,\ e_{12n+16}\}_{n=0}^{6}$$

$$\{G(e_{24n+17})\}_{n=3}^{9}=\{e_{24n+17},\ e_{24n+18},\dots,\ e_{24n+40}\}_{n=3}^{9}$$

Покажем справедливость этих соотношеней в одном случае

$\{G(e_{12n+5})\}_{n=0}^{6}=\{e_{12n+5},\ e_{12n+6},\dots,\ e_{12n+16}\}$.

Остальные случаи проверяются аналогично.

$$\pi_1(e_{29})=\pi_1 e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{29}$$

$$\pi_2(e_{29})=\pi_2 e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{30}$$

$$\pi_3(e_{29})=\pi_3 e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{31}$$

$$\pi_4(e_{29})=\pi_4 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{36}$$

$$\pi_5(e_{29})=\pi_5 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{39}$$

$$\pi_6(e_{29})=\pi_6 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{34}$$

$$\pi_7(e_{29}) = \pi_7 e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{38}$$

$$\pi_8(e_{29}) = \pi_8 e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{33}$$

$$\pi_9(e_{29}) = \pi_9 e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{35}$$

$$\pi_{10}(e_{29}) = \pi_{10} e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{32}$$

$$\pi_{11}(e_{29}) = \pi_{11} e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e_{40}$$

$$\pi_{12}(e_{29}) = \pi_{12} e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{37}$$

$$\pi_{14}(e_{29}) = \pi_{14} e_{29} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{30}$$

$$\pi_{15}(e_{29}) = \pi_{15}e_{29} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e_{31}$$

$$\pi_{16}(e_{29}) = \pi_{16}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{36}$$

$$\pi_{17}(e_{29}) = \pi_{17}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{39}$$

$$\pi_{18}(e_{29}) = \pi_{18}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e_{34}$$

$$\pi_{19}(e_{29}) = \pi_{19}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{38}$$

$$\pi_{20}(e_{29}) = \pi_{20}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{33}$$

$$\pi_{21}(e_{29}) = \pi_{21}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{35}$$

$$\pi_{22}(e_{29}) = \pi_{22}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{32}$$

$$\pi_{23}(e_{29}) = \pi_{23}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e_{40}$$

$$\pi_{24}(e_{29}) = \pi_{24}e_{29} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{37}$$

Крайние точки множества квадратичных операторов определяются матрицами (e_l / J_j), $l = \overline{1,256}$, $j = \overline{1,4096}$. В силу приведенного выше описания траекторий группы G в H_1 достаточно изучить крайние точки, определяемые матрицами

$$Q = \left\{ (e_1 / J_j) : \left\{ (e_{5+12l} / J_j) \right\}_{l=0}^{6}, \left\{ (e_{24l+17} / J_j) \right\}_{l=3}^{9} \right\} \quad \overline{j = 1,4096},$$

а остальные получаются из них самосовмещениями, из этих $4^6 x 15$ крайних точек одна крайняя точка (e_1 / J_1), очевидно, определяет квадратичный оператор, переводящий симплекс S^3 в вершину A_1.

Далее, крайние точки из определенного выше семейства, в которых вторая и третья или вторая и четвертая, или четвертая и третья строки целиком состоят из нулей, задают квадратичные операторы, переводящие симплекс в одно из ребер A_1A_2, A_1A_3 или A_1A_4, число таких крайных точек равно 637; а крайние точки, в которых вторая или третья, или четвертая строки целиком состоят из нулей, задают квадратичные операторы, переводящие симплекс в один из треугольников $\Delta A_1A_2A_3$ или $\Delta A_1A_2A_4$ или $\Delta A_1A_3A_4$, число таких точек равно 16219.

В множестве Q 64 матрицы определяют сюрьективные квадратичые операторы: таким образом, остается исследовать $4^6x15-(1+637+16219+64)=44519$ крайних точек.

Для 2100 крайних точек соответствующие квадратичные операторы оставляют вершину A_1 неподвижной, а остальные три вершины A_1, A_2 и A_4 также переводят в вершину A_1. Опишем любую из этих крайних точек. Анализ остальных проводится аналогично.

Квадратичный оператор, соответствующий матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_2' = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 \\ x_3' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ x_4' = 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

В силу неравенства

$$ab \le 1/4 \text{ для } a+b=1 \text{ и } a \ge b; \quad b \ge 0 \qquad (2.2.4)$$

Очевидно

$$x_2' = 2x_1x_2 + x_1x_4 \le 2x_1(x_1+x_2+x_3+x_4) \le 1/2$$
$$x_3' \le 1/2$$
$$x_4' \le 1/2$$

Откуда имеем, что образ симплекса S^3 при отображении (2.2.3) имеет вид:

$$\{(x_1', x_2', x_3', x_4'):\ x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 1,\ x_2' \le 1/2,\ x_3' \le 1/2,\ x_4' \le 1/2\}$$

Для описания крайних точек $\{(e_{5+12l} / J_j)\}_{l=0}^{6}$, число которых составляет 18914, достаточно исследовать одну крайнюю точку, остальные исследуются аналогично. Рассмотрим квадратичный оператор, определенный матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Квадратичный оператор имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_2' = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_4 \\ x_3' = 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 \\ x_4' = 2x_2 x_4 + 2x_3 x_4 \end{cases}$$

В силу неравенства (2.2.4) $x_3' \le 1/2$ и $x_4' \le 1/2$, т.е. образ симплекса этого квадратичного оператора содержится в множестве

$$\{(x_1', x_2', x_3', x_4'):\ x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 1,\ \ x_3' \le 1/2,\ \ x_4' \le 1/2\}.$$

Для описания крайних точек $\{(e_{24l+17} / J_j)\}_{l=3}^{8}$, число которых составляет 19473, достаточно исследовать одну крайнюю точку, остальные исследуются аналогично. Рассмотрим квадратичный оператор, определенный матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Квадратичный оператор имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 \\ x_2' = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 \\ x_3' = 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_4' = 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \end{cases}$$

В силу неравенства (2.2.4) $x_4' \le 1/2$, т.е.образ симплекса этого квадратичного оператора содержится в множестве

$$\{(x_1', x_2', x_3', x_4'):\ x_1 + x_2' + x_4' = 1,\ \ x_4' \le 1/2\}.$$

Остается тепер описать крайние точки $(e_{233} \mid J_j)$ для j, для которых $(e_{233} \mid J_j)$ не сюрьективны. Число таких точек равно 4032. Рассмотрим, например, квадратичный оператор

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.2.5)$$

Остальные описываются аналогично.

Квадратичный оператор, соответствующий матрице (2.2.5), имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3 \\ x_2' = x_4^2 \\ x_3' = x_3^2 \\ x_2' = x_4^2 \end{cases}$$

Это квадратичный оператор вершины симплекса оставляет неподвижными. Таким образом, в этом параграфе исследованы все крание точки множества квадратичных операторов, определенных на симплекса S^3.

Глава III.

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕР ПОРОЖДЕННЫХ ОДНИМ КЛАССОМ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА ДВУХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

§ 3.1. Эргодическое свойства Менделевских мер.

Пусть (E, m)произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [21] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как это конструкция необходима нам для дальнейшего изложения, приведем её для случая конечного множества E[3].

Пусть $E = \{1, 2, ..., N\}$ и $m(\{i\}) = P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $\mathrm{P_i} \geq 0$ и $\sum_{l=1}^{N} p_l = 1$. Пусть $\Omega = \Pi_{l=1}^{\infty} E_l$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n-функция, ставящая в соответствие точке $\omega \in \Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n называют n-й координатой функцией. Пусть $F - \sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : (\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), ..., \xi_{n+k-1}(\omega)) \in A\} = \{\omega : (\omega_n, \omega_{n+1}, ... \omega_{n+k-1}) \in A\}$$

где A-подмножество прямого произведения $E^k = \Pi_{l=1}^{k} E_l$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1,\ \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\},$$

где i_j-элемент множества E, $n \le j \le n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω, F) однозначно определяется своими значениями

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = P\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\} \qquad (3.1.1)$$

на этих цилиндрах, где n-номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k-размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [21], если для множества функций $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} p_n(l_1, l_2, ..., l_k) \ge 0 \\ \sum\limits_{l=1}^{N} p_n(l_1, l_2, ..., l_k, l) = p_n(l_1, l_2, ..., l_k) \\ \sum\limits_{l=1}^{N} p_n(l) = 1 \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

при всех k, n и $l_j \in E, 1 \le j \le k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = \sum_{l=1}^{N} p_n(l, l_1, l_2, ..., l_k) \qquad (3.1.3)$$

при всех k, n и $l_j \in E, 1 \le j \le k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{p_n(l_1, l_2, ..., l_k),\ n\ и\ k\ натуральные\}$, удовлетворяющих условию (2). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $p_n(l_1, l_2, ..l_k)$.

1. **Схема Бернулли**. Пусть $m(\{l\}) = p_l$ - распределения на $E = \{1,2,...,N\}$. Если положить

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = p_{l_1} p_{l_2} ... p_{l_k} \qquad (3.1.4)$$

т.е. $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (3.1.2), (3.1.3). Соответствующая (3.1.4) мера P называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует цепь Бернулли, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\Pi = (p_{l\,j})_{l,j=1}^{N}$-стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = p_{l_1} p_{l_1 l_2} ... p_{l_{k-1} l_k} \qquad (3.1.5)$$

т.е. $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (3.1.2). Соответствующая (3.1.5) мера P называется Марковской. Если вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ удовлетворяет условию $P\Pi = P$, то будет иметь место соотношение (3.1.3). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

В (39) был предложен новый способ построения семейства функций $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$, основанный на применении квадратичных операторов.

Пусть $E = \{1,2,...,N\}$-конечное множество. Для квадратичного оператора $V : S^{N-1} \to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $p_n(l)$ определим следующим образом:

$$p_n(l) = x_l^{(n-1)} \qquad (3.1.6)$$

для всех натуральных n и $l \in E$. Так как $x^{(n)} \in V^{(n)}(S^{N-1}) \subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V

сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}\left(S^{N-1}\right)=S^{N-1}$. Очевидно из (3.1.6) следует $\sum_{l=1}^{N} p_n(l)=1$, так как $x^{(n-1)} \in S^{N-1}$.

Таким образом, одно из условий (3.1.2)имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $p_n(l_1,l_2,...,l_k)$ при $k>1$ определим образом

$$p_n(l_0,l_1,...,l_k)=x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} p_{l_0m_1,l_1} \cdot p_{l_1m_2,l_2} \cdot p_{l_2m_3,l_3} \cdots p_{l_{k-1}m_k,l_k}\ x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \cdots x_{m_k}^{(n+k-1)} \quad (3.1.7)$$

По построению функции (3.1.6)- (3.1.7) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)} \in S^{N-1}$ на E.

Первое условия (3.1.2), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{l=1}^{N} p_n(l_0,l_1,...,l_k,l)=x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N} p_{l_0m_1,l_1} \cdot p_{l_1m_2,l_2} \cdot p_{l_2m_3,l_3} \cdots p_{l_{k-1}m_k,l_k}\ p_{l_km_{k+1},l}$$
$$x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \cdots x_{m_{k+1}}^{(n+k)} = x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} p_{l_0m_1,l_1} \cdot p_{l_1m_2,l_2} \cdots p_{l_{k-1}m_k,l_k}$$
$$\cdot x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \cdots x_{m_k}^{(n+k-1)} = p_n(l_0,l_1,...,l_k)$$

так как $\sum_{l=1}^{N} p_{l_km_{k+1},l} =1$ и $\sum_{m_{k+1}=1}^{N} x_{m_{k+1}}^{(n+k)} =1$.

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (3.1.6)- (3.1.7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)} \in S^{N-1}$.

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенной

Элстоном и Стюартом[17]. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, Aa и aa. Квадратичный оператор, определяющей модель наследования в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAAa,AA}, P_{AaAa,AA}, P_{AAaa,AA}$ и.т.д.-всего 27-переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA} = 1,\ P_{AAAa,AA} = 1/2, P_{AaAa,AA} = 1/4,\ P_{AAaa,AA} = 0, \ldots$$

для упрощения записи вместо $\{AA, Aa, aa\}$ будем рассматривать множество $E = \{1,2,3\}$. Тогда

$$\begin{array}{lll}
P_{11,1} = 1 & P_{12,1} = P_{21,1} = 1/2 & P_{13,1} = P_{31,1} = 0 \\
P_{11,2} = 0 & P_{12,2} = P_{21,2} = 1/2 & P_{13,2} = P_{31,2} = 1 \\
P_{11,3} = 0 & P_{12,3} = P_{21,3} = 1/2 & P_{13,3} = P_{31,3} = 0 \\
P_{22,1} = 1/4 & P_{23,1} = P_{32,1} = 0 & P_{33,1} = 0 \\
P_{22,2} = 1/2 & P_{23,2} = P_{32,2} = 1/2 & P_{33,2} = 0 \\
P_{22,3} = 1/4 & P_{23,3} = P_{32,3} = 1/2 & P_{33,3} = 1
\end{array} \tag{3.1.8}$$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным (см. Главу I). В этом случае

$$\begin{cases}
x_1^{(1)} = \left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)^2 \\
x_2^{(1)} = 2\left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)\left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right) \\
x_3^{(1)} = \left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right)^2
\end{cases} \tag{3.1.9}$$

$$\begin{cases}
x_1^{(1)} = \left(x_1^1 + x_2^1 / 2\right)^2 \\
x_2^{(1)} = 2\left(x_1^1 + x_2^1 / 2\right)\left(x_3^1 + x_2^1 / 2\right) \\
x_3^{(1)} = \left(x_3^1 + x_2^1 / 2\right)^2
\end{cases} \tag{3.1.10}$$

или, подставляя в (3.1.10) выражения (3.1.9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(x_1^0 + x_2^0/2\right)^2 \\ x_2^{(2)} = 2\left(x_1^0 + x_2^0/2\right)\left(x_3^0 + x_2^0/2\right) \\ x_3^{(2)} = \left(x_3^0 + x_2^0/2\right)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$

$$x^{(k)} = x^{(1)} \qquad (3.1.11)$$

для любого $k > 1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, Aa и aa что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) \in S^3$ начальное распределение на $E = \{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$ - вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (3.1.8). Такие меры будем называть менделевскими.

Теорема 3.1.1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)} \in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = l_1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l} = l_1\right) + \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l} = l_1\right)}{2^{l-1}}a \qquad (3.1.12)$$

где $a \in M = \left\{1/2x_2^{(1)}, \left(x_3 + 1/2x_2\right)\left(x_3 - x_1\right), -1/2\left(x_3 + 1/2x_2\right)\left(x_3 - x_1\right),\right.$

$\left. -x_3^{(1)}, 1/2\left(x_3 - x_1\right)^2, 1/2\left(x_1 + 1/2x_2\right)\left(x_3 - x_1\right), -\left(x_1 + 1/2x_2\right)^2\right\}.$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l.

$$\left\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, \ldots, \xi_{k+l}(\omega) = l_l\right\}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\left\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, \ldots, \xi_{k+l}(\omega) = l_l\right\}\right) = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m_1,\ldots,m_l=1}^{N} P_{l_0 m_1} \cdot P_{l_1 m_2, l_2} \cdot \ldots P_{l_{l-1} m_l, l_l} \cdot x_{m_1}^{(k)} \cdot x_{m_2}^{(k+1)} \ldots x_{m_l}^{(k+l-1)}, \qquad (3.1.12^1)$$

откуда $P_{x^{(0)}}\left(\left\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+l}(\omega) = l_1\right\}\right) = x_l^{(k)} \sum_{m=1}^{N} P_{l_0 m, l_1} x_m^{(k)}$ (3.1.13), При $l=1$ в силу (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10) и (3.1.13) имеем

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+l}(\omega)=1\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,1}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}\left(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=2,\xi_{k+l}(\omega)=2\}\right)=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,2}x_m^{(k)}=x_2^{(1)}1/2\left(x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_3^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2x_2^{(1)}(x_3-x_1)^2=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=3,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_3^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{3m,3}x_m^{(k)}=x_3^{(1)}\left(x_3^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+1}(\omega)=2\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,2}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}\left(x_3^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=x_2^{(1)}x_2^{(1)}+x_1^{(1)}x_3^{(1)}-1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,3}x_m^{(k)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)-P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)^2\cdot$$
$$\cdot P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=2,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,3}x_m^{(k)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)$$
$$1/2(x_3+1/2x_2)(x_1-x_3)$$

Предположим, что равенство (3.1.12) доказано для натурального $l>1$ и докажем это равенство для $l+1$. Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением (4.А) [54,55] .

$$P_{l_0l_1,k}^{[S,t+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}P_{l_0l_1,k}^{[S,t]}P_{\alpha\beta,k}^{[t,t+1]}x_\beta^{[t]}$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{l_0m,k}^{[k,k+l+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{l_0m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]} \qquad (3.1.14)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=l_0,\xi_{k+l+1}(\omega)=l_1\}\right)=x_{l_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P^{[k,k+l+1]}_{{}_{1m,3}\,x_m^{(k)}}=x_m^{(k)}=x_{l_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}\left[\sum_{\alpha,\beta}^{3}P^{[k,k+l]}_{l_0m,\alpha}P^{[k+l,k+l+1]}_{\alpha\beta,l_1}x_\beta^{[k+l]}\right]x_m^{(k)}=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}x_{l_0}^{(k)}\left[\sum_{m=1}^{3}P^{[k,k+l]}_{l_0m,\alpha}x_m^{(k)}\right]P^{[k+l,k+l+1]}_{\alpha\beta,l_1}x_\beta^{[k+l]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}\left(\{\xi_k=l_0,\xi_{k+l}=\alpha\}\right)P^{[k+l,k+l+1]}_{\alpha\beta,l_1}x_\beta^{(k)}$$

В силу (3.1.11)

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l+1}=l_1\right)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}=\left(\{\xi_k=l_0,\xi_{k+l}=\alpha\}\right)P_{\alpha\beta,l_1}x_\beta^{(1)} \tag{3.1.15}$$

Теперь, как и в случае $l=1$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1. Мы ограничимся рассмотрим только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $l_0=l_1=1$ и $l=2$.

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+2}=1\right)=\sum_{\alpha=1}^{3}P_{x^{(0)}}=\left(\xi_k=1,\xi_{k+l}=\alpha\right)\sum_{\beta=1}^{3}P_{\alpha\beta,1}x_\beta^{(1)}=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1\right)\left(P_{11,1}x_1^{(1)}+\right.$$
$$\left.+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2\right)\left(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)}\right)+$$

$$+P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+1}=3\right)\left(P_{31,1}x_1^{(1)}+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)}\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1\right)\left(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)+$$
$$+P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2\right)\left(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)}\right)=\left(x_1^{(1)}\right)^3+\left(x_1^{(1)}\right)^2x_2^{(1)}/2+\left(x_1^{(1)}\right)^2x_2^{(1)}/2+\left(x_2^{(1)}\right)^2x_1^{(1)}/4+$$
$$+\left(x_1^{(1)}\right)^2x_1^{(1)}/2+\left(x_2^{(1)}\right)^2x_2^{(1)}/4+\left(x_1^{(1)}\right)^2\left(x_3+x_2/2\right)\left(x_3-x_1\right)/2+1/4x_1^{(1)}x_2^{(1)}\left(x_3+x_2/2\right)\left(x_3-x_1\right)=$$
$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi=1\right)x_2^{(1)}$$

Теперь предложим, что для некоторого l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1}=1\right)+1/2^l\,P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1\right)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=2,\xi_{k+1}=2\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=2\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1}=2\right)+1/2^l\,P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=2\right)\left(x_3-x_1\right)^2$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=3,\xi_{k+1}=3\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=3\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1}=3\right)+1/2^l\,P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=3\right)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(1/2x_2+x_3)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\left(-(x_2+2x_3)^2\right)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\xi_{k+1}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\xi_{k+1}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(1/2x_2+x_3)(x_1-x_3)$$

Легко доказывается также, как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что эти равенства верны для $l+1$.

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i=j=1$ в силу (3.1.15)

$$\begin{aligned}
&P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l+1}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=1)\left(P_{11,1}x_1^{(1)}+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)}\right)+\\
&P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=2)=\left(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=3)\left(P_{31,1}x_1^{(1)}+\right.\\
&\left.+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)}\right)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=1)\left(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+l}=2)\left(1/2x_1^{(1)}+\right.\\
&\left.1/4x_2^{(1)}\right)=x_1^{(k)}x_1^{(k+l)}(x_1+1/2x_2+1/2x_2+x_3)+1/2^l x_1^{(k)}(x_1+1/2x_2)(x_3+1/2x_2)\\
&(2x_1+x_2+x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l+1}=1)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}/2
\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Теорема 3.1.2. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом начальном $x^{(0)}\in S^2$ и любых натуральных $k,l_1,...,l_{n-1}$ и l_n имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2,...,\xi_{k+l_1+...+l_n}=l_n\right)=\prod_{j=1}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_j}=l_j\right)+A_n^{l_n} \quad (3.1.16)$$

Где

$$A_n^{l_n} = A_{n-1}^{l_{n-1}}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_n} = l_n\right) + a_n / 2^{l_n - 1}\right] + \frac{\prod_{j=1}^{n} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_j} = l_j\right)}{2^{l_n - 1}} a_{l_n},\ l_0 = 0,\ A_0^{l_0} = 0, A_0^{l_s} = 1$$

$$A_1^{l_S} = \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_S} = l_S\right)}{2^{l_S - 1}} a_{l_S}, 1 \le S \le n,$$

$$a_{l_n}, a_{l_S},\ a_n \in M = \left\{1/2x_2^{(1)}, (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -1/2(x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), x_3^{(1)}, 1/2(x_3 - x_1)^2,\right.$$
$$\left. 1/2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -(x_1 + 1/2x_2)^2\right\}$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по *n*. При $n = 1$в силу теорема 3.1.1 имеем

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right)\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0\right)}{2^{l_S - 1}} \alpha_{l_S},$$

или

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+...+l_S} = l_S, \xi_{k+l_1+l_2+...+l_S} + l_{S+1} = l_{l_{S+1}}\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+...+l_S} = l_S\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+...+l_S+l_{S+1}} = l_{l_{S+1}}\right) +$$
$$\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_{S+1}} = l_{S+1}\right)}{2^{l_{S+1} - 1}} \alpha_{l_{S+1}} = P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+...+l_S} = l_S\right) \cdot P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+...+l_S+l_{S+1}} = l_{l_{S+1}}\right) + A_1^{l_{S+1}}$$

Предложим, что равенство (3.1.16) доказано для натурального *n*, и докажем это равенство для $n + 1$.

Для этого доказательство теоремы разделим на две части. Рассмотрим сначала случай, когда произведение $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} \neq 0$.

Тогда (3.1.12) в силу (3.1.14) перепишем в виде

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2,\ldots,\xi_{k+l_1+\ldots+l_n}=l_n\right)=$$

$$=x_{l_0}^{(k)}\sum_{m_1,m_2,\ldots,m_n}P_{l_0m_1,l_1}^{[k,k+l_1]}P_{l_1m_2,l_2}^{[k+l_1,k+l_1+l_2]}\ldots P_{l_{n-1}m_n,l_n}^{[k+l_1+\ldots+l_{n-1},k+l_1+\ldots+l_n]}x_{m_1}^{(k)}x_{m_2}^{(k+l_1)}\ldots x_{m_n}^{(k+l_1+\ldots+l_n)}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2,\ldots m_n}P_{l_0m_1,l_1}^{[k,k+l]}P_{l_1m_2,l_2}^{[k+l_1,k+l_1+l_2]}\ldots P_{l_{n-1}m_n,l_n}^{[k+l_1+\ldots l_{n-1},k+l_1+\ldots+l_n]}x_{l_0}^{(1)}x_{m_1}^{(1)}x_{m_2}^{(1)}\ldots x_{m_n}^{(1)}=$$

$$=\frac{\left[\sum_{m_1}^{3}P_{l_0,m_1,l_1}^{[k,k+l_1]}x_{l_0}^{(1)}x_{m_1}^{(1)}\right]\left[\sum_{m_2}^{3}P_{l_1m_2,l_2}^{[k+l_1,k+l_1+l_2]}x_{l_1}^{(1)}x_{m_2}^{(1)}\right]\ldots}{x_{l_1}^{(1)}x_{l_2}^{(1)}}\cdot\frac{\left[\sum_{m_n}^{3}P_{l_{n-1}m_n,l_n}^{[k+l_1+\ldots+l_{n-1},k+l_1+\ldots+l_n]}x_{l_{n-1}}^{(1)}x_{m_n}^{(1)}\right]}{x_{l_3}^{(1)}\ldots x_{l_{n-1}}^{(1)}}=$$

$$=\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)\ldots}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_{n-1}}=l_{n-1},\xi_{k+l_1+\ldots l_n}=l_n\right)}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)\ldots P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_{n-1}}=l_{n-1}\right)}.$$

Пусть $n=2$. Тогда

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)=\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)}=$$

$$=\frac{\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)+A_1^{l_1}\right]}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)}\cdot\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+A_1^{l_2}\right]=$$

$$=\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)+A_1^{l_2}\right]\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+1/2^{\,2-1}a_{l_2}\right]=$$

$$=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+A_1^{l_2}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+1/2^{l_2-1}a_{l_2}\right]+$$

$$1/2^{l_2-1}a_{l_2}\cdot P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)\cdot P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+A_1^{l_2}$$

Теперь предположим, что для некоторого n справедливо равенство (3.1.16). Доказывается, что и при $n+1$ равенство имеет место

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \dots, \xi_{k+l_1+\dots+l_{n+1}} = l_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{\prod_{j=0}^{n} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j, \xi_{k+l_1+\dots+l_j+1} = l_{j+1}\right)}{\prod_{j=0}^{n} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\right)} = \frac{\prod_{j=0}^{n} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\right) + A_n^{l_n}}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n\right)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n\right) = \prod_{j=0}^{n+1} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\right) + A_n^{l_n}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_{n+1}} = l_{n+1}\right) + a_{l_{n+1}} / 2^{l_{n+1}-1}\right] +$$

$$+ \frac{\prod_{j=0}^{n} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\right)}{2^{l_{n+1}-1}} a_{l_{n+1}} = \prod_{j=0}^{n+1} P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\right) + A_{n+1}^{l_{n+1}}$$

Если $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} = 0$, тогда мера Менделя является бернуллиевской. Теорема доказана.

Следствие 1. Менделевская мера, построенная выше, является асимптотически бернуллиевский.

Доказательство следует из представлений (1.3.12) и (1.3.16).

В пространстве Ω произвольный сдвиг Т определяется следующим образом: для $\omega \in \Omega,\ \ \omega' = T\omega$ где $\omega'_n = \omega_{n+1}$.

Определение. Преобразование Т обладает свойством перемешивания кратности $r \geq 1$ или, проще, перемешиванием кратности r, если для любых измеримых множеств $A_0, A_1, A_2, \dots, A_r \in F$.

$$\lim_{l_2,\dots,l_r \to \infty} \mu\left[A_0 \cap T^{l_1} A_1 \cap \dots \cap T^{(l_1+\dots+l_r)} A_r\right] = \mu(A_1) \dots \mu(A_r).$$

Следствие 2. Преобразование сдвига Т является перемешиванием кратности *r*.

Доказательство.

$$\left\{\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \dots, \xi_{k+l_1+\dots+l_r} = l_r\right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{r} \left\{\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\right\} = \prod_{j=0}^{r} T^{(l_1+\dots+l_j)}\left\{\xi_k = l_j\right\} \qquad ,$$

В силу (1.3.6), (1.3.9), (1.3.16) и следствия 1 получим

$\lim\limits_{l_2,\dots,l_r\to\infty} P\left[\prod_{j=0}^{r} T^{(l_1+\dots+l_j)}\{\xi_k = l_j\}\right] = \prod_{j=0}^{r} P\{\xi_k = l_j\}$. Следствие доказано.

§ 3.2. Об отношении Менделевской и Бернуллиевской мер на двухмерном симплексе.

Пусть (E, p)-пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{l=1}^{\infty} E_l$, где $E_l = E$ для всех l. Пусть $E = \{1,2,\dots,n\}, p(l) = p_l$ - распределение на E. пусть ξ_n-функция, ставящая в соответствие точке $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ значение ω_n ее *n*-й координаты. ξ_n называется координатной функцией.

Пусть $F - \sigma$-алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : \xi_m(\omega) = l_0, \xi_{m+1}(\omega) = l_1, \dots, \xi_{m+k}(\omega) = l_k\}.$$

На $F - \sigma$-алгебре определим две меры P и Q следующим образом.

Мера Q на F однозначно определяется своими значениями

$$Q\{\omega : \xi_m(\omega) = l_0, \xi_{m+1}(\omega) = l_1, \dots, \xi_{m+k}(\omega) = l_k\} = Q_m(l_1, l_2, \dots, l_k) = Q_{mk}$$

Если положить

$$Q_{mk} = P_{l_1} P_{l_2} \dots P_{l_k} \qquad (3.2.1)$$

То имеет место соотношение

$$Q_{mk} \geq 0, \ \sum_{l=1}^{n} Q_m(l_1, l_2, \dots, l_k, l) = Q_{mk}, \ \sum_{l=1}^{n} P_m(l) = 1$$

Соответствующая (3.2.1) мера Q называется бернуллиевской.

Пусть $E = \{1,2,3\}$. Квадратичный оператор определим на S^2 следующим образом

$$P_{11,1}=1\ \ P_{22,1}=1/4\ \ P_{33,1}=0\ \ P_{12,1}=1/2\ \ P_{13,1}=0\ \ P_{23,1}=0$$
$$P_{11,2}=0\ \ P_{22,2}=1/2\ \ P_{33,2}=0\ \ P_{12,2}=1/2\ \ P_{13,2}=1\ \ P_{23,2}=1/2$$
$$P_{11,3}=0\ \ P_{22,3}=1/4\ \ P_{33,3}=1\ \ P_{12,3}=0\ \ P_{13,3}=0\ \ P_{23,3}=1/2$$

Этот оператор является менделевским, т.к. для него имеют место законы наследственности Менделя (17).

Пусть $x^{(0)}=\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$- начальное распределение на E и $P_{x^{(0)}}$ -вероятностная мера на Ω, соответствующая семейству функций

$$P_{m_k}=P_m\left(l_0, l_1, l_2, \ldots, l_k\right)=$$
$$x_{l_0}^{(m)} \sum_{m_1, \ldots, m_k=1}^{3} P_{l_0 m_1, l_1} \cdot P_{l_1 m_2, l_2} \cdot P_{l_2 m_3, l_3} \ldots P_{l_{k-1} m_k, l_k}\ x_{m_1}^{(m)} \cdot x_{m_2}^{(m+1)} \ldots x_{m_k}^{(m+k-1)} \quad (3.2.2)$$

Меры, порожденные тим семейством конечномерных распределений, назовем менделевскими.

Теорема 3.2.1. Менделевская мера P и бернуллиевская мера Q являются сингулярными.

Доказательство. Заметим, что P_{m_k} и Q_{mk} удовлетворяют всем условиям (56 стр.2). Поэтому $P \perp Q$ только и тогда, когда

$$\prod_{k \geq 0}\left(\sum_k f_k^{1/2} Q_k\right)=0 \qquad (3.2.3)$$

Где f_n-производная Радона-Никадима P_{m_k} относительно Q_{mk}. Таким образом, доказательство теоремы будет следовать из равенства (3.2.3). Докажем это равенство. Из (3.2.2) получаем

$$P_{m_k}=P_m\left(l_0, l_1, l_2, \ldots, l_k\right)=x_{l_0}^{(m)} \sum_{m_1=1}^{3} P_{l_0 m_1, l_1 x_{m_1}^{(m)}} \cdot \sum_{m_2=1}^{3} P_{l_1 m_2, l_2 x_{m_1}^{(m)}} \cdot$$

$$x_{m_2}^{(m+1)} \ldots \sum_{m_k=1}^{3} P_{l_{k-1} m_k, l_k} x_{m_{k-1}}^{(m+k-2)} x_{m_k}^{(m+k-1)}\left[x_{l_1}^{(m)} x_{l_2}^{(m+1)} \ldots x_{l_{k-1}}^{(m+k-2)}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{P\left(\xi_k=l_0, \xi_{k+1}=l_1\right) \ldots P\left(\xi_{k+k-1}=l_{k-1}, \xi_{k+k}=l_k\right)}{x_{l_1}^{(m)} x_{l_2}^{(m+1)} \ldots x_{l_{k-1}}^{(m+k-2)}} \qquad (3.2.4)$$

Заметим, что

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=1,\xi_{m+1}(\omega)=1\right)\right\}\right)=x_1^{(m)}\sum_{l=1}^{3} P_{1l,1^x l^{(m)}}=\frac{x_1^{(m)}x_1^{(m)}}{\left(x_1+1/2x_2\right)}$$

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=2,\xi_{m+1}(\omega)=2\right)\right\}\right)=x_2^{(m)}\sum_{l=1}^{3} P_{2l,2^x l^{(m)}}=1/2x_2^{(m)}$$

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=3,\xi_{m+1}(\omega)=3\right)\right\}\right)=x_3^{(m)}\sum_{l=1}^{3} P_{3l,3^x l^{(m)}}=\frac{x_3^{(m)}x_3^{(m)}}{\left(x_3+1/2x_2\right)}$$

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=1,\xi_{m+1}(\omega)=2\right)\right\}\right)=x_1^{(m)}\sum_{l=1}^{3} P_{1l,2^x l^{(m)}}=\frac{x_1^{(m)}x_1^{(m)}}{2\left(x_1+1/2x_2\right)}$$

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=1,\xi_{m+1}(\omega)=3\right)\right\}\right)=x_1^{(m)}\sum_{l=1}^{3} P_{1l,3^x l^{(m)}}=0$$

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=2,\xi_{m+1}(\omega)=3\right)\right\}\right)=x_2^{(m)}\sum_{l=1}^{3} P_{2l,3^x l^{(m)}}=\frac{x_2^{(m)}x_3^{(m)}}{2\left(x_2+1/2x_3\right)}$$

Или

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=2,\xi_{m+1}(\omega)=2\right)\right\}\right)=1.2x_2^{(m)}=1/2x_2^{(1)}$$

$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=1,\xi_{m+1}(\omega)=3\right)\right\}\right)=0$ в остальных случаях.

$$P\left(\left\{\omega:\left(\xi_m(\omega)=l_0,\xi_{m+1}(\omega)=l_1\right)\right\}\right)=\frac{x_{l_0}^{(m)}x_{l_1}^{(m)}}{2^{|l_0-l_1|}\left(x_l+1/2x_2\right)}=\frac{x_{l_0}^{(1)}x_{l_1}^{(1)}}{2^{|l_0-l_1|}\left(x_{l_0}+1/2x_2\right)}.$$

В силу (3.2.3) из (3.2.4) получаем

$$P_m\left(l_0,l_1,l_2,...,l_k\right)=$$
$$\begin{cases} 0, \text{если}\, l_j=1,\ l_{j+1}=3\ \text{или}\ l_j=3, l_{j+1}=1,\ \text{для любого}\ j. \\ \left[2^{-1}x_2^{(1)}\right]^k,\ \text{если}\ l_j=2\ \text{для любого}\ j=0,1,...,k \\ \dfrac{x_{l_0}^{(1)}\left[x_{l_1}^{(1)}...x_{l_{k-2}}^{(1)}\right]^2 x_{l_{k-1}}^{(1)}}{4^{\left(\left|l_0-l_1\right|+...+\left|l_{k-1}-l_k\right|\right)}\left(x_{l_1}+1/2x_2\right)...\left(x_{l_{k-1}}+1/2x_2\right)},\ \text{если}\ l_j=1,3 \\ \dfrac{x_{l_0}^{(1)}\left[x_{l_1}^{(1)}...x_{l_S}^{(1)}\right]^2 x_2^{(1)t}\left[x_{l_{S+t}}^{(t)}...x_{l_{k-2}}^{(1)}\right]^2 x_{l_{k-1}}^{(1)}}{2^{2(k-1)-l}\left(x_{l_1}+1/2x_2\right)...\left(x_{l_S}+1/2x_2\right)\left(x_{l_{S+t}}+1/2x_2\right)...\left(x_{l_{k-1}}+1/2x_2\right)},\ \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Где $l=\left|\{j:l_j=2\}\right|$, $|\cdot|$ определяет мощность множества.

Отсюда легко показать, что

$$\prod_{k\geq 0}\left(\sum_k\left(P_k/Q_k\right)\right)^{1/2}Q_k)\leq 3\prod_{k\geq 0}\left(x_{l_1}^{(1)}x_{l_2}^{(1)}...x_{l_n}^{(1)}\right)^{1/2}=0\,.$$

Теорема доказана. При $x^{(0)}\neq x^{-(0)}\in S^2$ меры $P_{x^{(0)}}$ и $P_{x^{-(0)}}$ сингулярным.

Доказательство. Следует из теоремы 1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедиз, 1938. 125с.

2. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связаной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.

3. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация М: Мир, 1969, с 238.

4. Валландер С.С. О предельном поведении последовательности итараций некоторых квадратичных преобразований. // Докл. АН. СССР 1972. Т.202. 13 с.515-517.

5. Валландер С.С. Эргодические свойства одного семейства квадратичных стохастических операторов. В. Кн. «Кольца и модули предельные теоремы теории вероятностей» 1986. Вып.1. с 153-157.

6. Ганиходжаев Р.Н. О неподвижных точках квадратичных операторов. // ДАН.Уз ССР, 1977. №8,18,С 3-7.

7. Ганиходжаев Р.Н., Саримсаков Т.А. О не растягивающих квадратичных стохастических операторах. // ДАН Уз ССР. 1988 №6, с.6-7.

8. Ганиходжаев Р.Н., Саримсаков Т.А. Об одном простом критерии регулярности квадратичных стохастических операторов.// ДАН Уз ССР, 1988, №11, с. 5-6.

9. Ганиходжаев Н.Н. об усреднениях квадратичных стохастических процессов. // ДАН Уз ССР, 1989, №10, с. 7-9.

10. Ганиходжаев Р.Н. Об одном семействе квадратичных стохастических операторов действующих в S^2. // ДАН Уз ССР, 1989, №1, с. 3-5.

11. Ганиходжаев Р.Н., Саримсаков Т.А. Об одном обобщении примера С.Улама.// ДАН Уз ССР, 1989, №3, с. 5-9.

12. Ганиходжаев Н.Н., Азизова С.Р.О неоднородных квадратичных стохастических процессах.// ДАН Уз ССР, 1990, №4, с. 3-5.

13. Ганиходжаев Р.Н. Эргодический принцип и регулярность для одного класса квадратичных стохастических операторов. // Уз М. Ж. 1992,, №3, с. 83-87.

14.Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб.,1992.Т.183, №8, с. 119-140.

15. Ганиходжаев Н. Н.,Мухитдинов Р.Т. Об одном классе мер, соответствующем квадратичным операторам. // ДАН РУз ССР, 1996, №3, с. 3-6.

16. Ганиходжаев Н.Н.,Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичные операторов. // ДАН РУз ССР, 1997, №8, с. 10-12.

Об одной конструкции квадратичные операторов

17.Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.:Мир. 1986,528 с.

18.Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.

19.Дабрушин Р.Л. Центральная предельная теорема для нестационарных марковских цепей I,II. // Теор.вероят. и еепримен. 1956, Т. I.вып. 1. с.72-89; Т. I.вып. 4. с.396-426.

20.Захарович М.И. О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса. //УМН, 1978. Т.33.№6. с.207-208.
21. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.
22.Корнфельд И.П.,Синай Я.Г.,Фомин С.В. Эргодическая теория. М: Наука,1990, 384 с.
23.Куратовский К.Топология. Том 1,М.: Мир.1966,596 с.
24.Курганов К.А. О неподвежных точках и поведении траекторий одного квадратичного оператора четырехмерном симплекса. В кн.”Математический анализ и геометрия” Труды ТашГУ, 1983 с.41-45.
25.Курганов К.А. О поведении траекторий одного квадратичного отображения,действующего в четырехмерном симплекса. В кн.”Математический анализ и теория вероятностей.” Труды ТашГУ, 1987 с.77-80.
26.Любич Ю.И. Итерации квадратичних преобразований. В кн. “Математическая эканомика и функциональный анализ”. М. Наука,1974.с.109-138.
27.Любич Ю.И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций. УМН,1971.Т.26,вып.5, с.51-116.
28.Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев,1983.-296 с.
29.Мейлиев Х.Ж.,Мухитдинов Р.Т. Об одном классе мер, соответствующем квадратичным оператором на S^2. Тезисы докл. Респ.науч.конф. «Новые теоремы молодых математиков-94.»С.52.

30. Мейлиев Х.Ж. Об отношении Менделевских и Бернуллиевской мер на двухмерном симплексе. Матем.молод. ивычис.экспр.Тизисы докладов международной конференции,1994.-с.193
31. Мейлиев Х.Ж. Крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на на S^3. Конференция. Тошкент. ,1996.25-27 апрель-77б.

32. Мейлиев Х.Ж. Об одном свойстве мер, соответствующим менделевским квадратичным операторам. Конференция International conference on some topics of mathematics. October 13-17,1996.Samarkand,P.151-152.

33. Мейлиев Х.Ж. Описание Менделевских мер соответствующих квадратичных операторов. Конференция. Тошкент. ,1997-йил.10-12 б

34. Мейлиев Х.Ж. Описание сюрьективних квадратичных операторов и классификация крайних точек множества квадратичных операторов, определенных на S^3. УзМЖ.1997.№3,С.39-48.

35. Мейлиев Х.Ж. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов. Рук.деп.в ГКНТ №2452-Уз95 от 02.10.95г.-20 с

36 .Мухитдинов Р.Т. Об одном классе квадратичных операторов, определенных на двухмерном симплексе., и крайних точек множества квадратичных операторов. ТашГУ,1994, с.186-193.

Meliev Khabibulla Jamolovich, Quadratic Stochastic Operators, Defined On And S2 И S3. Monograph. Fergana-USA: Global Book Publishing Services (GBPS) USA, 2023, 74 p.

Global Book Publishing Services
1211 Polk St, Orlando, FL 32805, USA
Email info@scientificpublication.org

9 781957 653198

GBPS